第26卷第1期　管理科学　ISSN 1672-0334　Vol. 26 No. 1　80-88
2013年2月　Journal of Management Science　February, 2013

博弈框架下巴黎期权性质的可转换债券定价

鲍继业，张　恒
华中科技大学 管理学院，武汉 430074

摘要： 可转换债券的赎回条款具有巴黎期权的性质，定价过程中应考虑赎回权利对可转换债券价值的影响；基于实物期权和期权博弈理论，可转换债券的定价过程可以与动态博弈过程类比；可转换债券发行公司与持有者之间是零和博弈，应用无风险套利原理，结合赎回条款的特点，将巴黎期权的性质纳入可转换债券定价过程，给出相应的定价方程。以2010年9月16日上市的塔牌可转换债券为例，借助数值算法和相关数据，计算出可转换债券价值，通过对比并结合持有者的最优策略，解释赎回公告期和巴黎期权特性对可转换债券价值的影响。研究结果表明，巴黎期权的引入降低了可转换债券的价值；随着公告期长度的增加，可转换债券的价值越大。上述性质与可转换债券发行公司设计赎回条款的目的一致，在一定程度上赎回条款具有迫使持有者转股的作用。

关键词： 可转换债券；巴黎期权；零和博弈；赎回公告期
中图分类号： F830.91　**文献标识码：** A　**doi：** 10.3969/j.issn.1672-0334.2013.01.008
文章编号： 1672-0334(2013)01-0080-09

1 引言

可转换债券是一种介于债券和股票之间的融资工具，它既包括固定收益证券的特征，也包括权益特征。可转换债券可以保障投资者的基本收益，即固定收益证券的利息和到期偿还的本金，同时它还赋予投资者依据自身需求将可转换债券换成公司普通股票的权益。

国内外实证研究表明，可转换债券的赎回条款对于可转换债券发行和融资相关问题有重要影响。可转换债券公告书中赎回条款指明，公司股票价格连续20天（或30天）左右超过规定的阈值，可转换债券发行公司可以决定是否宣告赎回公告期，从而执行赎回。从期权的角度分析，赎回条款的性质类似于巴黎期权，但理论定价研究中鲜有研究将条款中赎回条款这一因素融入可转换债券定价过程。因此，合理反映赎回条款的影响，构建融合巴黎期权的可转换债券的定价方程并给出计算思路是本研究要解决的关键问题。

2 相关研究评述

可转换债券融资的优势体现在以下几个方面。

①可转换债券由于自身附加的权利，比普通债券具有较低的利息；②可转换债券的转换价格高于发行时的股价，属于溢价发行，因此发行可转换债券产生的稀释效应没有直接发行新股票产生的稀释效应严重；③可转换债券产生稀释效应的时点对公司而言通常是有利的，即转换权利的执行时刻通常是公司股价表现良好的时刻；④可转换债券的赎回条款可以解决由于信息不对称导致的逆向选择问题，减少代理成本等[1-3]。

截止到2011年9月，中国大陆共发行54只可转换债券，总融资规模达2 256.16亿元人民币，上海证券交易所和深圳证券交易所未到期的转债数量分别为13只和6只。从现有市场看，可转换债券的发展前景良好，因此如何合理并准确地对可转换债券进行定价显得尤为重要。

可转换债券的定价研究始于20世纪60年代，

收稿日期： 2012-06-02　**修返日期：** 2012-10-24
基金项目： 国家自然科学基金(71071067，71231005)
作者简介： 鲍继业(1985-)，男，湖北荆州人，华中科技大学管理学院博士研究生，研究方向：金融风险管理和期权定价等。E-mail：bobboris@126.com

Poensgen[4-5]、Baumol 等[6]、Walter 等[7] 和 Weil 等[8] 的定价方法都是认为可转换债券的价值等同于普通债权的最大值，或者是将未来某时间点转换后的折现价值定为可转换债券的价值。这些定价模型的主要问题是，前者的做法没有考虑可转换债券中债券性质和股票性质的相互影响，后者的规定忽略了内嵌于可转换债券中期权的价值。

Ingersoll[9] 首次将期权的观点应用于可转换债券定价分析中，构建了一个理性假定框架下的偏微分方程，应用占优的思想探讨投资者最优转换策略和发行者最优赎回选择问题。Ingersoll[9] 的模型中将可转换债券视为标的变量为公司价值的衍生证券，但是该模型在实际运用中却存在缺陷，主要在于公司资产的不可交易性导致公司价值及其波动率等难以估计。在此基础上，McConnell 等[10] 的定价模型将标的变量换为股票价格，因此成为应用最广泛的一种可转换债券的定价模型，大多数的定价研究均基于该模型。

定价中理想的情况是求出可转换债券定价方程的解析解，但是方程中不可避免的会出现时间的微分项，在有限时间的分析中，大多数类似的方程迄今也未有理论上的解析解，除非在建立模型之前放松相应的假设条件。一般情形下，可转换债券的定价会归结为一个包括边界条件的偏微分方程求解问题。宋殿宇等[11] 研究股票价格服从双指数跳扩散过程以及存在其余违约风险情况下的可转换债券定价问题，运用鞅方法得出可转换债券价格的显式解。然而，除极少数方程可以推出显式解，大多数方程都需要借助算法得出问题的数值解。现有研究中主要有网格法、有限差分方法和有限元方法 3 种数值定价方法，研究较多的是有限差分方法。Cox 等[12] 提出一种为期权定价的网格法，这种简单的离散时间模型逐步被 Rendleman 等[13] 推广；Lyuu 等[14] 认为，对于可转换债券和类似对利率敏感产品的定价时，需要关注股票价格和利率，并首次给出确保有效转移概率的二叉树方法；Brennan 等[15] 给出求解一类偏微分方程的有限差分方法，并分别阐述了显式和隐式有限差分；Hull 等[16] 认为显式有限差分方法虽然在计算时间有效性方面优势突出，但在收敛性方面会存在问题，他针对相应的算法做了改进，保证计算值能够收敛到方程的解；龚朴等[17] 采用有限元方法给出可转换债券定价模型数值解；Ammann 等[18] 给出一个基于 Monte Carlo 模拟的可转换债券定价模型，模型包括两个阶段，使用提前执行策略的参数表示法；韩立岩等[19] 将基于 PLS 的美式期权定价方法扩展到可转换债券的定价，成功解决了多因素扰动条件下的可转换债券定价问题和路径依赖问题；张卫国等[20] 在 Black-Scholes 模型基础上，提出具有支付红利以及标的资产为美式期权的可转换债券模糊定价问题，同时给出具有三角模糊数形式的可转换债券定价公式；张卫国等[21] 提出可转换债券的全最小二乘拟 Monte Carlo 定价方法，并给出定价的具体算法步骤。

赎回条款对于可转换债券研究极具重要性，从可转换债券诞生之初一直到今天仍然引起不少学者的研究兴趣。鉴于可转换债券的复杂性质，对于赎回条款的争论至今也未有统一的结论。Butler[22] 认为只有当赎回公告期长度为零时（即不存在赎回公告期），实际市场的情形才会符合 Ingersoll[9] 和 Brennan 等[15] 给出的结论，若赎回公告期存在就会产生可转换债券市场上的推迟赎回现象；Altintig 等[23] 用实证的方法检验在考虑赎回公告期因素的影响下，可转换债券的赎回溢价明显小于之前一些学者给出的研究结果；Wang[24] 认为可转换债券会在持续融资时被公司广泛使用，特别是对拥有较多投资期权的公司，同时还发现可转换债券的赎回条款对于设计有效的可转换债券非常必要；Yagi 等[25] 在融合发行者和投资者的最优策略后，分析投资者的最优执行边界和发行者的最优赎回边界的解析性质；Yang 等[26] 给出的可转换债券定价方程可以看做抛物线变分不等式，最优赎回和最优转换策略对应于方程的自由边界，他们主要分析自由边界的数学性质（单调性、光滑性和有界性）。若是考虑实际情况下赎回条款的影响，就不得不面临一个巴黎期权的概念，会对原有的经典算法和理论提出不小的挑战。因此，合理的将巴黎期权融入可转换债券的定价方程并给出准确的计算方法成为刻画定价的一个研究分支。

也有较多学者从实物期权和博弈的角度对可转换债券进行定价研究，因为可转换债券定价过程中涉及到发行者行为和持有者行为之间的相互影响。可转换债券发行过程中，发行者（即公司）和持有者之间是零和博弈的关系[27]。刘亮[28] 尝试从委托代理角度给出基于代理的可转换债券定价模型，并可以解释理论定价和市场定价的偏差现象。本研究分析公司在进行赎回决策时，重新从博弈的角度出发，沿用 Lau 等[29] 的思路，假设发行者实行赎回策略的目的是最小化可转换债券的价值，持有者实行转换策略的目的是最大化可转换债券的价值。Beveridge 等[30] 采用 Monte Carlo 模拟计算零和期权博弈的边界，并将结果应用于可转换债券的定价；Egami[31] 考虑公司用可转换债券融资的方式获得一个扩张期权的问题，运用实物期权的方法分析融资过程的最优策略，同时用一个实际的例子解释其模型的结果。用博弈的观点对发行者与持有者之间的互动给予解释[32]，其优势在于阐明问题时具有清晰和简洁的形式，有助于充分考虑赎回条款对发行者和持有者双方的影响，对可转换债券的定价和条款设计都会产生建设性的启发。

3 具有巴黎期权性质的可转换债券定价方程

3.1 方程的建立

假设股票价格 S 服从几何布朗运动，即

$$dS = (\mu - D)Sdt + \sigma SdW \tag{1}$$

其中,μ 为股票漂移率,D 为股票的连续红利,$\mu < D$,t 为时间,σ 为股票的波动率,W 为一个标准的维纳过程。

可转换债券的赎回条款具有巴黎期权的性质,是一个连续监测的上敲出巴黎期权,记障碍价格为 S_b,股票价格 S 连续超过障碍价格 S_b 达到规定的时间长度后,期权就被敲出。J 表示股票价格 S 超过障碍价格 S_b 的连续时间,则

$$J = t - \sup\{\tau < t \mid S_\tau \leqslant S_b\} \tag{2}$$

其中,J 为障碍时间,类似于一个计数器,即股票价格 S 在障碍价格 S_b 上方的连续时间;S_τ 为时刻 τ 的股票价格。参数 J 的动态变化规律为

$$dJ(t) = \begin{cases} 0 & S_t \leqslant S_b \\ dt & S_t > S_b \end{cases} \tag{3}$$

当 S 超过 S_b 时,J 开始计数,此时障碍时间与时间的变化率同步;当 J 达到规定的阈值 $\bar{J}$(即公告书中规定满足触发赎回条件的障碍时间),巴黎期权被敲出。若在 J 达到 $\bar{J}$ 之前 S 回落至 S_b 之下,则需要将 J 重新置零。图 1 给出了形象的说明,图 1 中横坐标为时间,纵坐标为对应的股票价格,虚线与横坐标的交点为离散的观测时点,细实线为实际股票价格走势,粗实线为障碍价格 S_b。

只要股票价格 S 未达到障碍价格 S_b,可转换债券类似于美式期权。股票价格达到障碍价格后计数开始,可转换债券价值 V 为 S、t、J 3 个变量的函数,即 $V = V(S,t,J)$。经典的定价方程只处理两个参数变量,引入障碍时间参数后,可转换债券的定价方程需同时刻画 3 个参数变量,增加了方程设置时的复杂程度。依据参数变量间变化的特点,特别是参数 t 与 J 的关系,本研究采用划分变量范围的方式进行适当简化。因此,可转换债券定价过程被分为两种情形。

(1) 当 $S \leqslant S_b$ 时,变量 $J = 0$。根据无套利定价方法,可转换债券的定价方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV + C(t) = 0$$

$$S \in (0, S_b],\ t \in [0, T] \tag{4}$$

其中,r 为无风险利率,T 为可转换债券的存续期,$C(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \delta(t - t_i)$,$c_i$ 为每次支付的利息,t_i 为支付利息的日期,$\delta(\cdot)$ 为示性函数,m 为存续期内支付利息的次数。

(2) 当 $S \geqslant S_b$ 时,$dJ = dt$。同样可根据无套利定理得出相应的定价方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial J} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV + C(t) = 0$$

$$S \in [S_b, +\infty],\ t \in [0, T],\ J \in [0, \bar{J}] \tag{5}$$

图 2 直观地给出(4)式和(5)式的关系,其中横坐标为障碍时间,纵坐标为时间,竖坐标为股票价格。平面 A 由纵坐标和竖坐标构成,平面 B 与平面 A 成 45° 夹角(横坐标和纵坐标的变化同步)。因此,股票价格达到障碍价格 S_b 之前在平面 A 内运动,可转换债券的价值由(4)式刻画;股票价格越过障碍价格 S_b 后且巴黎期权没有被敲出之前在平面 B 内运动,可转换债券的价值由(5)式表示。

3.2 边界条件的确定

在构建边界条件时,标准定价方程通常基于可转换债券条款中的特点构造一个目标方程相应的约束式(即边界条件)。引入赎回条款中时间问题后,目标方程增至两个方程,不仅要在各自变量范围内纳入约束式,还要理清约束式之间的逻辑联系。为了解决边界条件问题,本研究在理性假设的条件下,借助博弈论中比较分析的思路定量刻画条款对市场双方的影响。因此,在确定边界条件前,先分析可转换债券定价中发行者与持有者之间的博弈关系。博弈的局中人为发行者和投资者,局中人的策略如下,当可转换债券的赎回条款被触发,即第一次满足 $J = \bar{J}$ 时,可转换债券的发行者需要决定是否赎回可

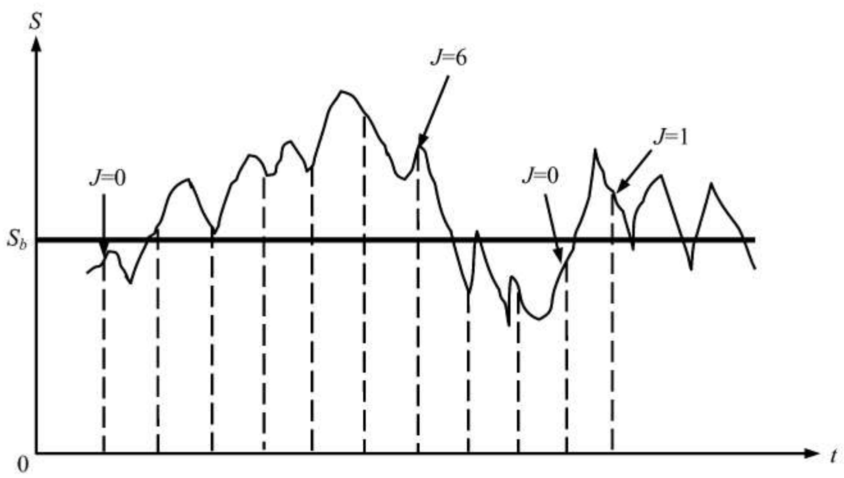

图1 巴黎期权中计数器 J 的解释

Figure 1 Illustration of Barrier Time J of Parisian Option

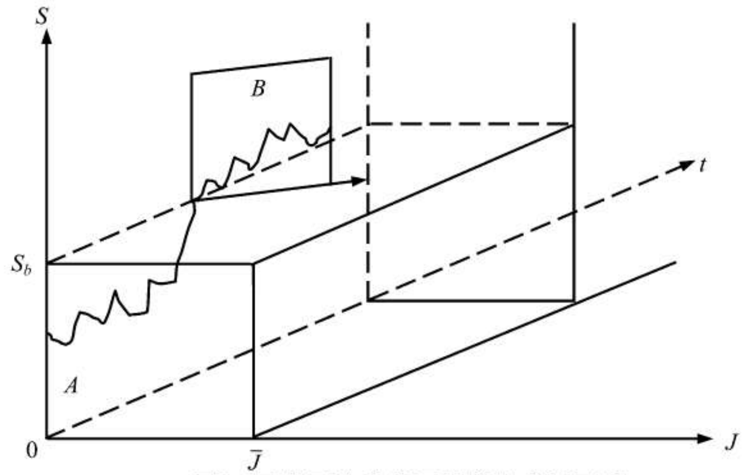

图 2　具有巴黎期权可转债的求解区域

Figure 2　Domain of Convertible Bond with Parisian Option

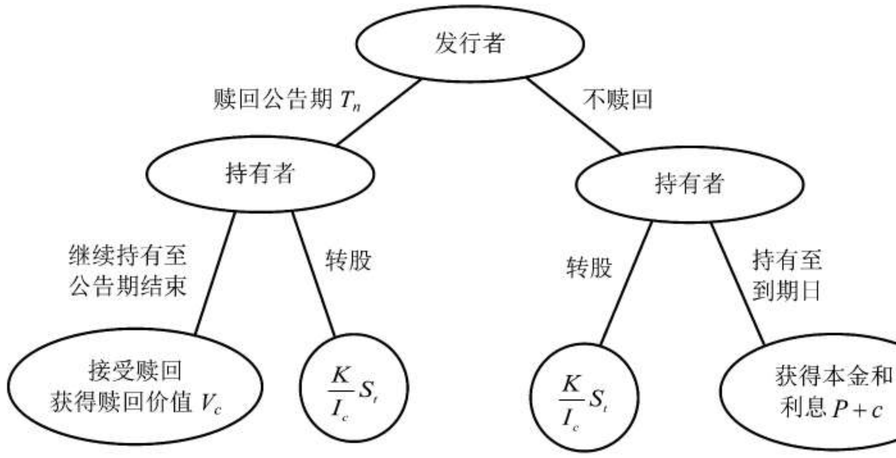

图 3　定价过程的决策树

Figure 3　Pricing Decision Tree

转换债券,若发行者决定赎回,并给出赎回公告期的长度 T_n,则持有者根据公告期内的股票价格情况选择转股或者持有至公告期结束日获得赎回价值 V_C;若发行者决定不赎回,则持有者可以选择转股或者继续持有至最后阶段获得本金 P 和利息 c。发行者和持有者的博弈过程可由图3表示,其中 K 为可转换债券的面值,I_c 为转股价格。

图 3 为定价过程的决策树,决策树给出的扩展式博弈不完全等同于标准零和博弈,因为在持有者决策阶段,不同情形下的支付涉及的时间段不同,不可以直接比较最终价值(图 3 中给出的 4 个支付报酬),而是需要将价值按照服从的方程及比较规则折回发行者决策的时点。这表明虽然在需要决策的每个时刻矩阵中支付函数是确定的,但是不同时刻的支付函数矩阵均不同。

(1) 发行者赎回条件下持有者的决策

若在赎回条款触发时刻 $\bar{t}(J(t) \geqslant \bar{J})$ 发行者选择赎回,可转换债券的巴黎期权特性消失,即可转换债券转化为一个美式期权,且在赎回公告期内不产生任何利息。可转换债券持有者可以选择持有可转换债券至公告期结束,获得赎回价值 V_C,或者在公告期内任意时刻转股,获得支付报酬 $\frac{K}{I_c}S_t$。这种情形下,持有者持有的是标的变量为公司股票价格 S、到期日为 $(\bar{t}+T_n)$ 且到期支付函数为 $\max\{V_c, \frac{K}{I_c}S_t\}$ 的美式期权,即

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-D)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

$$S\in(0,+\infty),\ t\in[\bar{t},\bar{t}+T_n] \tag{6}$$

赎回条件下美式期权的价值记为 V_{cla}。

(2) 发行者不赎回条件下持有者的决策

若在赎回条款触发时刻 $\bar{t}$ 发行者决定不赎回,可转换债券持有者可以选择持有可转换债券至期满,获得本金和最后一期的利息($P+c$),或者在此期间转股。持有者持有的是一个标的变量为公司股票价格 S、到期日为 T 且到期的支付报酬为 $\max\{P+c, \frac{K}{I_c}S_t\}$ 的美式期权,服从

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-D)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV+c(t)=0$$

$$S\in(0,+\infty),\ t\in[\bar{t},T] \qquad (7)$$

不赎回条件下美式期权的价值记为V_{ncla}。

(3) 发行者的决策

发行者在赎回条款触发时刻 $\bar{t}$ 的决策取决于可转换债券持有者两种条件下美式期权价值的最小值，即$\min\{V_{cla},V_{ncla}\}$。故在时刻 $\bar{t}$ 的可转换债券的价值为$V(S,t,\bar{J})=\min\{V_{cla},V_{ncla}\}$。(5) 式的终端条件为

$$V(S,T,J)=\max\{P+c,\ \frac{K}{I_c}S_t\} \qquad (8)$$

在可转换债券的存续期内，存在离散的支付利息，根据无套利原理，支付利息前后可转换债券的价值满足

$$V(S,t_i^-,J)=V(S,t_i^+,J)+c_i \qquad (9)$$

其中，t_i^-为支付利息前一时刻，t_i^+为支付利息后一时刻。

当股票价格 S 回落到障碍价格S_b时，J 会重置为零。同样由无套利分析可知，此时的连续性由下面的等式保证，即

$$V(S_b,t,J)=V(S_b,t,0) \qquad (10)$$

4 定价方程的算法

上述根据具体问题提出的偏微分方程，由于无法求出其显式解，本研究采用复合期权的思想为可转换债券定价[33]。

4.1 定价方程的求解步骤

为了程序计算的方便，采用有限差分方法处理不含有变量 J 的(4) 式、(6) 式和(7) 式，采用有限元方法处理(5) 式。

数值求解时，用逆向推导的方式进行。

(1) 分别算出(6)式和(7)式的美式期权价值V_{cla}和V_{ncla}。

(2) 取$\min\{V_{cla},V_{ncla}\}$的值作为(5)式的边界条件，联合(8)式和(9)式可以计算出$S\in[S_b,+\infty]$条件下可转换债券的价值。

(3) 运用连续性条件(10)式，求解(4)式可以计算出$S\in(0,S_b]$条件下可转换债券的价值。

4.2 复合期权定价模型

可转换债券投资者的转换权利在允许的时间范围内可以随时执行，若将权利的执行限定到离散的时间点上，则可转换债券内嵌的美式期权就被离散为复合期权问题[34]，持有者权力执行的离散时间点与可转换债券支付利息的时间点之间的关系如图 4 所示。

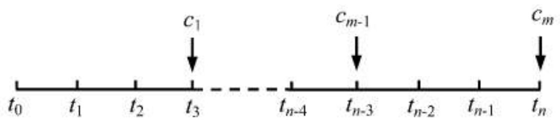

图 4 复合期权定价模型
Figure 4 Compound Option Pricing Model

在图 4 中，t_i为可转换债券持有者决策的时间点，$i=0,1,2,\cdots,n$，可转换债券在约定的时间(如$t_3,\cdots,t_{n-3},t_n$)点上支付相应的利息($c_1,\cdots,c_{m-1},c_m$)。记每一固定时刻支付利息为$c(t)$，$c(t)=c_i\delta(t-t_i)$；可转换债券的存续期$T=t_n-t_0$；S_t为标的股票在 t 时刻的价值；$V(S_t,t)$为在 t 时刻股票价值为S_t时可转换债券的价值。

在每一个离散的时间点，可转换债券持有者都有选择的权利。如果持有者在t_i处选择转换，得到转换后股票的价值为$\frac{K}{I_c}S_{t_i}$；如果选择继续持有，可以拥有的价值为$V(S_{t_i},t_i)+c(t_i)$。模型中所有的局中人都是理性的，其目标都是最大化自己的利益。因此在该模型中，对持有者而言，支付函数的表达式为

$$\max\{\frac{K}{I_c}S_{t_i},V(S_{t_i},t_i)+c(t_i)\} \qquad (11)$$

由于存续期长度 T 一定，当$n\rightarrow+\infty$ 时，持有者在可转换债券的存续期内随时都具有选择的权利，模型给出的价值会趋向于具有美式期权可转换债券的价值。程序计算时取 n 足够大，模型就可以给出可转换债券具有足够精度的数值解。

5 实际算例

下面以塔牌转债为例计算可转换债券的价值，计算参数如表 1 所示。

表 1 广东塔牌集团股份有限公司可转换债券参数
Table 1 Parameters of the Convertible Bond Issued by Guangdong Tapai Group Co., Ltd.

参数	取值
面值 K	100 元
无风险利率 r	0.032
年波动率 σ	0.300
年分红率 D	0.010
可转换债券的存续期 T	5 年
每年可转换债券支付利息 c 的利率	(0.8%, 1.0%, 1.2%, 1.6%, 2.0%)
转股价格 I_c	13.310 元
障碍价格 S_b	$I_c\cdot 1.3=17.303$ 元
障碍时间阈值 $\bar{J}$	20 天
赎回公告期 T_n	20 天
赎回价格 V_c	105 元
到期可转换债券支付价格 P	110 元

数据来源：广东塔牌集团股份有限公司可转换公司债券上市公告书。

5.1 可转换债券价值

下面给出存在赎回条款情形下（$T_n = 20$）与不存在赎回条款情形下可转换债券的价值比较，如表 2 和图 5 所示。

表 2 两种条件下可转换债券的价值

Table 2 Values of Convertible Bond in the two Conditions

股票价格	有赎回公告可转换债券价值	无赎回公告可转换债券价值
8.000	102.165	102.165
10.016	107.541	110.260
15.008	122.612	132.971
20.020	150.474	160.823
25.064	188.311	192.333
30.000	225.394	225.394

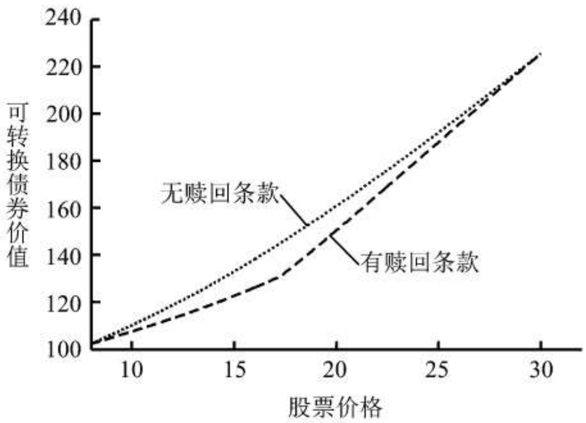

图 5 两种条件下可转换债券的价值

Figure 5 Values of Convertible Bond in the two Conditions

为了明确两条价值曲线的差异，图 6 给出可转换债券在两种情形下价值之差关于股票价格的走势。

从图 6 可以看出，当股票价格较低或较高时，两者价值差异并不明显。主要原因是，当股票价格较低时，可转换债券的持有人没有转股的动力，发行者也没有赎回的意愿；当股票价格较高时，持有者的最优决策是转股，可转换债券的价值即为转换的价值。当股票价格在障碍价格附近时，赎回条款的作用被充分体现，与无赎回条款的可转换债券相比，降低了约10% 可转换债券的价值。赎回公告期限制了持有者做决策的时间，减少了股票价格在达到赎回条件后继续上升为持有者带来的收益。

5.2 赎回公告期长度对可转换债券价值的影响

赎回公告期是发行公司从宣布赎回公告至赎回可转换债券之前容许持有者决策的时间。根据表 1 的参数进行计算，可以画出如图 7 的结果。图 7 中的 4 条线分别为不同赎回公告期长度条件下对应的可转换债券的价值。从图 7 可以看出，赎回公告期 T_n 的长度越长，可转换债券的价值会越大。这点也可以从定价过程中得出，当 T_n 越大，持有者具有的在 (6) 式中期权的价值会越大，即 V_{cla} 越大，从而 $\min\{V_{cla}, V_{ncla}\}$ 的值很可能增加。边界条件取值的增加会直接提高(5)式中可转换债券的价值，同时也间接提高(4)式中可转换债券的价值。因此，赎回公告期对可转换债券的价值有提升的作用，这与赎回公告期赋予持有者更长时间的选择权的实际含义吻合。

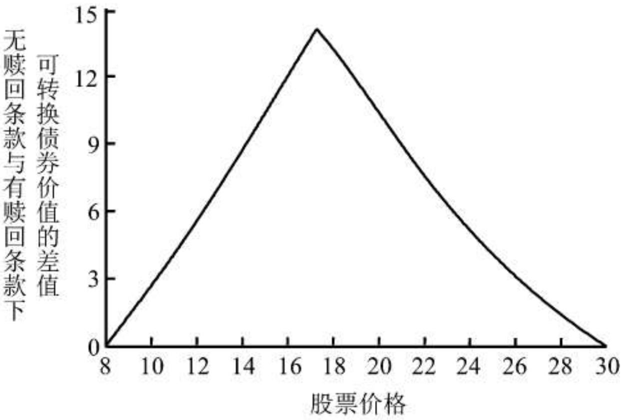

图 6 两种条件下可转换债券价值之差随股票价格变化情况

Figure 6 Changes of the Difference between Values of Convertible Bond in the Two Conditions along with Varying of Stock Price

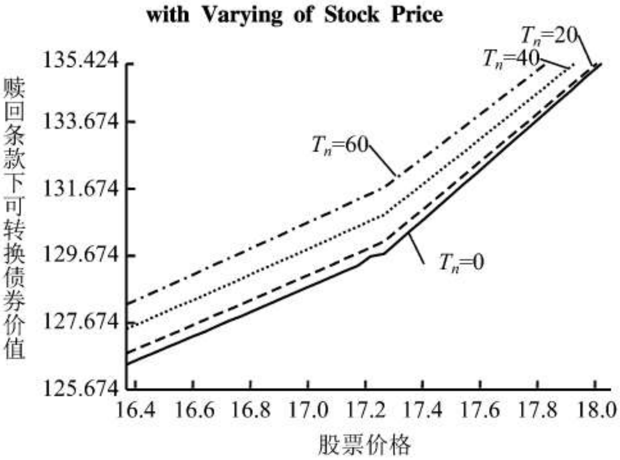

图 7 不同赎回公告期长度的可转换债券价值

Figure 7 Values of Convertible Bond with Different Lengths of Redemption Notice Period

5.3 无赎回条款时持有者的临界转股价格

从等待与转换权利的角度来说，持有者的临界转股价格是持有可转换债券价值等于转换价值时的股票价格。也就是说，股票价格高于临界转股价格

时,持有者就会转股;反之,则会继续持有可转换债券。对持有者而言,若其判断可转换债券标的股票走势情况的能力不足,无赎回条款时临界转股价格就成为重要参考依据。根据表 1 的参数计算出可转换债券在存续期内持有者的临界转股价格,结果如图 8 所示。

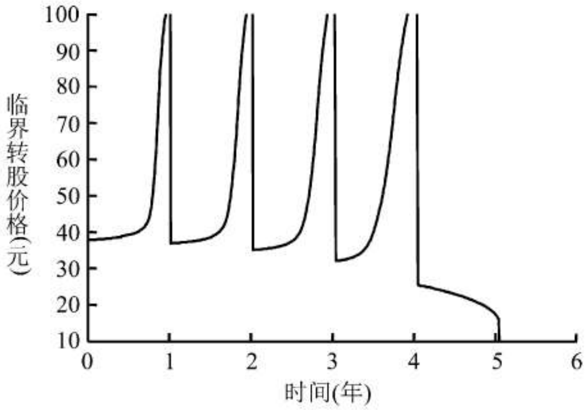

图 8 无赎回条款时持有者的临界转股价格

Figure 8 Critical Conversion Stock Price without Redemption Provision

无赎回条款的条件下,除最后一年外,可转换债券的持有者在每一年内的临界转股价格走势都是递增的。从图 8 可以看出,持有者在接近支付利息日时要求的转股价格是非常高的,也就意味着持有者不会转股。因为市场上实际股票价格在短时间不会突变,$S(t_i^-)=S(t_i^+)$,$S(t_i^-)$ 为支付利息前一刻的临界转股价格,$S(t_i^+)$ 为支付利息后一刻的临界转股价格。若可转换债券持有人转股,则支付利息后获得的价值大于支付利息前的价值,$\frac{K}{I_c}S(t_i^+)+c_i>\frac{K}{I_c}S(t_i^-)$。因此,持有者不会在支付利息前一刻转股。

临界转股股价在最后一个阶段随时间呈现出下降的趋势,主要是因为最后时刻的支付方式不会像在支付利息阶段那样影响到转股价格,同时随着可转换债券到期日的临近,转股时间减少,持有者会倾向转股。

6 结论

可转换债券的定价关系着发行公司和投资者切身的利益,合理定量刻画可转换债券蕴涵的特性显得尤为重要。本研究在博弈的框架下,考虑赎回条款的影响,构建一个可以刻画巴黎期权性质的可转换债券定价方程。数值求解过程基于博弈中逆向推导的方法,给出定价模型的数值解,即可转换债券的价值。以塔牌转债为例分析赎回条款和赎回公告期对可转换债券价值的影响,研究结果如下。

(1)赎回条款的引入降低了可转换债券的价值,但是在股票价格较低或较高的情形下,赎回条款对可转换债券的影响不明显。因此,发行公司在实际决策过程中应充分预估可转换债券中标的股票的走势,从而选取合理的股票价格作为触发赎回条件时的股票价格。

(2)赎回公告期的长短关乎可转换债券双方的利益。若赎回公告期过短,持有者的利益得不到保护,并且持有者达不到转股的条件从而持有可转换债券直到被赎回,发行者会有大笔现金流出,没有达到可转换债券的发行目的(即鼓励持有者将可转换债券转换为股票);若赎回公告期过长(极端情形为赎回公告期 $T_n\to$ 可转换债券剩余的存续期),对发行者而言,赎回公告期就失去了应有的作用,即迫使持有者在赎回公告期内达到转股条件时就行使相应权利的作用。同时,发行者送股、派股和派息这些正常影响发行公司股权结构的事件,不会对可转换债券相应的分析产生根本性的影响。结合实例可知赎回公告期的延长虽然提高了可转换债券的价值,但提高的程度并不是十分明显。由此可知,对持有者而言,过长的赎回公告期不是特别必要。因此,对于市场上大多数公司选择赎回公告期为20天~40天而言,如何更多的从发行者角度来确定一个合理的赎回公告期长度成为可转换债券条款设计研究中值得关注的方面。

(3)赎回公告的存在有迫使持有者转股的作用,这可以从图 8 最后一阶段临界转股价格的走势分析看出。赎回条款使可转换债券的到期日缩短为赎回公告期的长度(虽然与持有至可转换债券到期日支付的数值不同,但递减的规律相同),在此期间,持有者的临界转股价格在某些条件下会降至或低于发行者行使赎回权利时的股票价格(即达到持有者面临的转换条件),理性的持有者就会行使转股的权利。

中国可转换债券的发行具有中国特色,科学全面的定价方法不仅可以消除投资者的困扰,同时有利于可转换债券市场的健康发展。本研究模型的思路为发行公司、投资者、监管机构等市场参与者使用和理解可转换债券这一融资工具提供了理论上的支持,只有基于可转换债券的合理定价,公司可转换债券的发行、投资者投资组合的优化和风险规避才更为切实可行。

参考文献:

[1] Hennessy C A, Tserlukevich Y. Taxation, agency conflicts, and the choice between callable and convertible debt[J]. Journal of Economic Theory, 2008, 143(1):374-404.

[2] Krishnaswami S, Yaman D. The role of convertible bonds in alleviating contracting costs[J]. The Quarterly Review of Economics and Finance, 2008, 48(4):792-816.

[3] Chakraborty A, Yilmaz B. Adverse selection and convertible bonds[J]. Review of Economic Studies, 2011, 78(1):148-175.

[4] Poensgen O H. The valuation of convertible bonds, part 1[J]. Industrial Management Review, 1965, 7(1):77-92.

[5] Poensgen O H. The valuation of convertible bonds, part 2[J]. Industrial Management Review, 1966, 7(2):83-98.

[6] Baumol W J, Malkiel B G, Quandt R E. The valuation of convertible securities[J]. The Quarterly Journal of Economics, 1966, 80(1):48-59.

[7] Walter J E, Que A V. The valuation of convertible bonds[J]. The Journal of Finance, 1973, 28(3):713-732.

[8] Weil R L, Jr, Segall J E, Green D, Jr. Premiums on convertible bonds[J]. The Journal of Finance, 1968, 23(3):445-463.

[9] Ingersoll J E, Jr. A contingent-claims valuation of convertible securities[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 4(3):289-321.

[10] McConnell J J, Schwartz E S. Lyon taming[J]. The Journal of Finance, 1986, 41(3):561-576.

[11] 宋殿宇,金华,刘善存. 双指数跳扩散过程下带违约风险的可转债定价[J]. 系统工程, 2011, 29(6):60-64.
Song Dianyu, Jin Hua, Liu Shancun. The convertible bonds pricing with default risk under double exponential jump diffusion process [J]. Systems Engineering, 2011, 29(6):60-64. (in Chinese)

[12] Cox J C, Ross S A, Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach[J]. Journal of Financial Economics, 1979, 7(3):229-263.

[13] Rendleman R J, Bartter B J. The pricing of options on debt securities[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1980, 15(1):11-24.

[14] Lyuu Y D, Wang C J. On the construction and complexity of the bivariate lattice with stochastic interest rate models [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 61(4):1107-1121.

[15] Brennan M J, Schwartz E S. Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis[J]. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1978, 13(3):461-474.

[16] Hull J, White A. Valuing derivative securities using the explicit finite difference method[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1990, 25(1):87-100.

[17] 龚朴,蒙坚玲,何志伟. 具有巴黎期权特性的可转债有限元定价和策略分析[J]. 系统工程, 2007, 25(12):63-69.
Gong Pu, Meng Jianling, He Zhiwei. Valuation and strategic analysis of convertible bonds with the parisian option feature using the finite element method [J]. Systems Engineering, 2007, 25(12):63-69. (in Chinese)

[18] Ammann M, Kind A, Wilde C. Simulation-based pricing of convertible bonds[J]. Journal of Empirical Finance, 2008, 15(2):310-331.

[19] 韩立岩,牟晖,王颖. 基于偏最小二乘回归的可转债定价模型及其实证研究[J]. 中国管理科学, 2006, 14(4):81-87.
Han Liyan, Mou Hui, Wang Ying. Convertible bond pricing model based on partial least square method and its empirical research[J]. Chinese Journal of Management Science, 2006, 14(4):81-87. (in Chinese)

[20] 张卫国,史庆盛,肖炜麟. 考虑支付红利的可转债模糊定价模型及其算法[J]. 管理科学学报, 2010, 13(11):86-93.
Zhang Weiguo, Shi Qingsheng, Xiao Weilin. Fuzzy pricing model of convertible bonds with dividends payment and its algorithm[J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(11):86-93. (in Chinese)

[21] 张卫国,史庆盛,许文坤. 基于全最小二乘拟蒙特卡罗方法的可转债定价研究[J]. 管理科学, 2011, 24(1):82-89.
Zhang Weiguo, Shi Qingsheng, Xu Wenkun. Pricing model of convertible bonds in China by total least-squares quasi-Monte Carlo method[J]. Journal of Management Science, 2011, 24(1):82-89. (in Chinese)

[22] Butler A W. Revisiting optimal call policy for convertibles[J]. Financial Analysts Journal, 2002, 58(1):50-55.

[23] Altintig Z A, Butler A W. Are they still called late? The effect of notice period on calls of convertible bonds[J]. Journal of Corporate Finance, 2005, 11(1/2):337-350.

[24] Wang S. Convertibles in sequential financing[J]. Review of Finance, 2009, 13(4):727-760.

[25] Yagi K, Sawaki K. The pricing and optimal strategies of callable warrants[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 206(1):123-130.

[26] Yang Z, Yi F. A free boundary problem arising from pricing convertible bond[J]. Applicable Analysis, 2010, 89(3):307-323.

[27] Sirbu M, Shreve E S. A two-person game for pricing convertible bonds[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2006, 45(4):1508-1539.

[28] 刘亮. 可转换债券市场异常现象的理论研究:基于委托代理问题的资产定价模型[J]. 中国管理科学, 2008, 16(2):14-19.
Liu Liang. Theoretical study of the anomalies of convertible bonds market: Pricing of convertible bonds

based on agency problem [J]. Chinese Journal of Management Science, 2008, 16(2): 14-19. (in Chinese)
[29] Lau K W, Kowk Y K. Anatomy of option features in convertible bonds [J]. Journal of Futures Markets, 2004, 24(6): 513-532.
[30] Beveridge C, Joshi M. Monte carlo bounds for game options including convertible bonds [J]. Management Science, 2011, 57(5): 960-974.
[31] Egami M. A game options approach to the investment problem with convertible financing [J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2010, 34(8): 1456-1470.
[32] Dutta P K. Strategies and games: Theory and practice [M]. Massachusetts: The MIT Press, 1999: 157-175.
[33] 龚朴,蒙坚玲. 基于期权博弈的可转换债券最优策略分析[J]. 管理工程学报,2009,23(1):70-75.
Gong Pu, Meng Jianling. Optimal strategies analysis of convertible bonds based on option game [J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2009, 23(1): 70-75. (in Chinese)
[34] Gong P, He Z, Zhu S. Pricing convertible bonds based on a multi-stage compound-option model [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2006, 336(1): 449-462.

A Game Approach to the Pricing of Convertible Bonds with Parisian Options Characteristics

Bao Jiye, Zhang Heng
School of Management, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

Abstract: The redemption provisions of convertible bonds own the Parisian options characteristics so the impact of redemption rights on the value of convertible bonds should be considered in the pricing. Based on theories of real options and option game, there is an analogy between the pricing of convertible bonds and dynamic game process. It is the zero-sum game relationship between the issuing houses of convertible bonds and holders. Based on risk-free arbitrage principle and features of redemption provisions, the study brings the Parisian options characteristics into the pricing of convertible bonds to get corresponding pricing equation. Taking the convertible bonds Tapai listed on September 16, 2010 as an example, the research calculates its value by means of numerical algorithms and related data and demonstrates how the redemption notice period and Paris option characteristics affect the value of convertible bonds by comparing and combining holders' optimal strategy. The results show that the introduction of Parisian options reduces the value of the convertible bonds, which increases along with the time accumulation of notice period. These findings are compatible with the design purpose of the redemption provisions by issuing houses of convertible bonds. To a certain extent, the redemption provisions play a role in forcing holders to converse shares.

Keywords: convertible bond; Parisian option; zero-sum game; redemption notice period

Received Date: June 2nd, 2012 **Accepted Date**: October 24th, 2012

Funded Project: Supported by the National Natural Science Foundation of China(71071067, 71231005)

Biography: Bao Jiye, a Hubei Jingzhou native(1985-), is a Ph. D. candidate in the School of Management at Huazhong University of Science and Technology. His research interests included financial risk management, option pricing, etc. E-mail: bobboris@126.com □