



基于效用的永久性 可转换债券定价

王晓林, 杨招军

湖南大学 金融与统计学院, 长沙 410079

摘要:在不完备市场条件下,假设公司价值可以观测,公司只发行股票和不可赎回、不可违约的具有固定票息的永久性可转换债券,债券持有人有权利(但没有义务)按一定比例将债券转换为股票。基于可转换债券的结构式定价模型,给出债券持有人的最优转换策略,推导出可转换债券消费效用无差别价格的半封闭式解,利用有限差分方法,得到可转换债券的隐含价值(即消费效用无差别价格)以及可转换债券的最优消费策略和转换策略的数值解。研究表明,债券持有人的风险态度和非系统风险对最优转换策略和可转换债券的隐含价值有显著影响,与完备市场条件相比,风险厌恶情形可转换债券的转换触发水平和隐含价值较低,风险资产价格波动率越大,可转换债券的隐含价值越大。

关键词:可转换债券;不完备市场;效用无差别定价;非系统风险

中图分类号:F830.91

文献标识码:A

doi:10.3969/j.issn.1672-0334.2013.03.010

文章编号:1672-0334(2013)03-0100-08

1 引言

可转换债券具有股票和债券的双重属性,投资者在公司最初发展前景不明朗时,为规避风险可以预先购买能够保证本金的可转换债券,一旦公司前景看好、赢利不断增多,债券持有人(有权利但没有义务)可以将其按事先约定的规则转换为一定数量的股票,从而分享股票的高收益回报。因此,可转换债券是一种投资者颇为欢迎的混合型金融工具。

关于可转换债券的一个重要问题就是如何给出合理价格。一般来说,可转换债券的定价方法有结构式方法和简约式方法两种,结构式方法以公司价值作为标的状态变量,这种定价方法有利于深入探析公司融资状况。然而通常公司价值是不可交易的,在非完备市场条件下,特别是中国证券市场层次结构不完善的情况下,债券投资者会面临不可对冲的非系统风险,因此投资者的风险态度对可转换债

券的定价有决定性影响,传统的风险中性定价不再适合。基于上述考虑,本研究在结构式方法的基础上,运用消费效用无差别定价方法对可转换债券的定价和最优转换策略的设计问题进行深入研究。

2 相关研究评述

自从 Black-Scholes 期权定价公式问世后,在完备市场条件下,国外对可转换债券定价理论的研究日渐成熟。Merton^[1]最先考虑了结构模型,即把债券看做基于公司价值的欧式期权;Ingersoll^[2-3]利用 Black-Scholes-Merton 模型方法建立债券的单因素结构化模型;Liao 等^[4]和 Sirbu 等^[5]采用结构化模型,综合税收规避和破产保护因素,给出可转换债券最优的赎回准则、转换条件和破产条件,Liao 等^[4]认为结构式方法有利于深入探析公司融资状况;Kühn 等^[6]利用简约式方法建立不同违约强度下的、不可赎回永久

收稿日期:2012-10-02 **修返日期:**2013-04-05

基金项目:国家自然科学基金(70971037,71171078,71221001);教育部博士点基金(20100161110022)

作者简介:王晓林(1986-),女,河南安阳人,湖南大学金融与统计学院博士研究生,研究方向:金融工程等。

E-mail:wofan-1986@163.com

性可转换债券定价模型。中国可转换债券市场起步于20世纪90年代初,相关的理论研究还很少,基本上是对国外研究成果的引进以及用蒙特卡罗模拟方法、二叉树和三叉树模型等做出的大量实证研究^[7-10]。杨大楷等^[11]最早探讨中国可转换债券的定价及设计问题;龚朴等^[12-13]利用博弈论和简约式方法,研究可转换债券发行者和投资者的策略均衡问题。简约式方法虽然不要求公司价值可以观测,但不能避免股票稀释效应的影响。

上述研究以及当前几乎所有的可转换债券理论本质上都假设投资者是风险中性的,风险中性假设极大地简化了问题的复杂性,作为探索可转换债券问题的起点,这一假设是可取的。对于完备理想的金融市场,风险中性定价方法可以得到唯一合理的无套利价格。

实际上,信用市场不是理想的完备市场,风险中性理论难以合理地解释一些重要的经济现象。例如,该理论认为在接近到期日,非困境下的公司短期债券收益差接近零,这与经验事实相违背。理论上说,风险中性假设只关心贴现收益的平均值,完全没有考虑不确定投资收益的大起大落可能产生的巨大危害。因而,这种模型下的投资理论会对风险资产给出过分乐观的定价。郑振龙等^[14]认为中国可转换债券的价格与其理论价值相比存在较大的差异,可转换债券的价值明显被低估。本研究认为,之所以存在较大差异,在可转换债券的价值明显被低估的同时,还由于那些(基于风险中性)债券理论过分地高估了债券的价格。实际上,这种过分乐观的风险中性理论价格容易诱导或鼓励投资者“生死豪赌”,“生死豪赌”一旦碰到不利的局面(根据概率大数定理,这种局面迟早会发生),就会导致企业破产,进而由于多米诺骨牌效应,有可能导致大范围的金融危机。事实上,始于2008年的全球金融危机与这种过分冒险投资有着必然的联系。因此,代替最大收益选择最大效用作为投资目标是必要的,这也是经济和管理科学的一个重要观点。

在非完备市场条件下,投资者面临无法完全对冲的风险,由此,风险态度对资产定价具有决定性的影响,因而基于效用的定价理论得到快速发展。Miao等^[15]、Chen等^[16]和Yang等^[17]都采用基于效用的投资消费定价理论;胡援成等^[18]从企业规模出发,建立规模序列计量经济模型,结合企业家效用函数,对收益和风险进行权衡来探求企业的最优资本结构;叶文忠等^[19]给出抵押贷款证券的效用无差别定价;Leung等^[20]、Sircar等^[21]和Liang等^[22]利用效用无差别定价建立可违约债券的信用风险模型,Leung等^[20]认为若公司违约触发点依赖于公司价值,由于其不可交易性导致可违约债券面临一些不可对冲的风险。可转换债券基于公司价值的结构式方法存在依赖公司价值的转换触发点问题,因而也存在不可对冲的非系统风险,故效用无差别定价方法适用于可转换债券的定价。

本研究假设公司价值可以观测,公司只发行股票和不可赎回、不可违约的永久性可转换债券,债券持有者有权利(但没有义务)在购买后按一定比例将债券转换为股票,在结构式定价方法的基础上,运用消费效用无差别定价方法,给出债券持有者的最优转换策略以及可转换债券的消费效用无差别购买价格。

3 可转换债券的消费效用无差别定价

3.1 模型的建立

假设公司价值 Y 可观测但不可交易,可交易风险资产(如市场组合) M 和公司价值 Y 分别服从如下几何布朗运动,即

$$dM_t = \mu M_t dt + \sigma M_t dW_t^1 \quad (1)$$

$$dY_t = \nu Y_t dt + \eta Y_t (\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^2) \quad (2)$$

其中, M_t 为 t 时刻的风险资产价格; μ 为风险资产的回报率,是常量; σ 为风险资产的波动率,是常量; Y_t 为 t 时刻的公司价值; ν 为公司价值的增长率,是常量; η 为公司价值的波动率,是常量; W_t^1 和 W_t^2 为定义在赋有信息流 $(F_t)_{t \geq 0}$ 的概率空间 (Ω, F, P) 上的相互独立的标准布朗运动; ρ 为风险资产与公司价值之间的相关系数, $|\rho| \leq 1$ 。

除了股票,公司还发行不可赎回、不可回售、不可违约的永久性可转换债券,券息为常数 b 。由于公司价值是可观测的,采用以公司价值为标的状态变量的结构式方法,在债券购买之后的任何时间 τ ,债券持有人可自愿将债券转化为市值为 ιY_τ 的股票, ι 为事先给定的常值转换比例, τ 为转换时刻, Y_τ 为 τ 时刻的公司价值。假定当前时刻为 $t=0$,在信息流 $\{F_t, t \geq 0\}$ 的条件下,转换时刻 τ 为停时。

为了对冲持有可转换债券带来的风险,债券持有人可以投资风险资产和收益率为常数 r 的无风险资产。对冲策略为 $\{\theta_t, t \geq 0\}$, θ_t 为 t 时刻债券持有人的风险资产市值。若策略 θ 是自融资的、非预测的且满足可积条件 $E \int_0^\infty \theta_t^2 dt < \infty$,则称策略 θ 是容许的,所有容许的策略组成的集合记为 Θ 。记消费策略为 $\{c_t, t \geq 0\}$, c_t 为 t 时刻的消费。

假设债券持有人具有如下 CARA 效用函数,即

$$U(c) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma c} \quad (3)$$

$c \in R$

其中, γ 为绝对风险厌恶系数, R 表示实数。根据消费效用无差别定价准则,可转换债券以消费效用无差别价格成交,投资者在购买和不购买可转换债券的情况下,在无限生命期内有相同的期望消费总效用。所以,下面分两种情况讨论。

3.2 不持有可转换债券的消费效用最大化问题

假设投资者只投资风险资产 M 和无风险资产。

记 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为投资者的财富过程, 财富过程满足

$$\begin{aligned} dX_t &= [\theta_t(\mu - r) + rX_t - c_t]dt + \theta_t\sigma dW_t^1 \\ X_0 &= x, t \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中, X_t 为 t 时刻的随机财富, 为随机变量; X_0 为当前时刻的随机财富, 为随机变量, 取当前时刻的财富为 x 。此时, 最大化投资者无限生命期内的期望消费总效用为

$$V^0(x) = \sup_{\theta, c} E \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\beta t} U(c_t) dt \mid X_0 = x \right\} \quad (5)$$

其中, β 为效用关于时间的贴现系数。这是一个标准的 Merton 投资消费问题, 可以得到解析解, 即

$$V^0(x) = -\frac{1}{r\gamma} \exp \left[1 - \frac{\beta}{r} - r\gamma \left(x + \frac{\alpha^2}{2r^2\gamma} \right) \right] \quad (6)$$

其中, α 为风险资产的夏普比, $\alpha = \frac{\mu - r}{\sigma}$ 。

3.3 持有可转换债券的消费效用最大化问题

假设投资者除了投资风险资产 M 和无风险资产外, 还购买了一份公司的可转换债券。由于投资者有可能将可转换债券转换为股票, 故投资者的财富过程服从下列变化, 即

$$\begin{cases} dX_t = [\theta_t(\mu - r) + rX_t + b - c_t]dt + \theta_t\sigma dW_t^1 & 0 \leq t < \tau \\ X_\tau = X_{\tau-} + \iota Y_\tau & \\ dX_t = [\theta_t(\mu - r) + rX_t - c_t]dt + \theta_t\sigma dW_t^1 & t > \tau \\ X_0 = x & \end{cases} \quad (7)$$

其中, $X_{\tau-}$ 为转换前一瞬时投资者的财富水平。若转换没有发生, 则投资者会在无限生命期得到券息 b ; 若转换发生, 则 τ 转换时刻投资者的财富水平增加 ιY_τ , 同时失去未来券息收益。通过选取最优对冲策略 θ^* 和最优消费策略 c^* 来最大化投资者无限生命期内的期望消费总效用

$$V(x, y) = \sup_{\theta, c} E \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\beta t} U(c_t) dt \mid X_0 = x, Y_0 = y \right\} \quad (8)$$

其中, Y_0 为当前时刻的公司价值, 为随机变量, 取当前时刻公司价值为 y 。

若公司当前价值足够高, 则投资者应立即将债券转换为股票, 相应的动态最优化问题与不持有可转换债券的期望消费总效用最大化问题(4)式和(5)式相同, 所以相应的最优解为(6)式。

若当前时刻没有发生转换, 由 Bellman 原理及模型的时间齐次特性, 问题(8)式等价于

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \sup_{\theta, c} E \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\beta t} U(c_t) dt + e^{-\beta\tau} V^0(X_{\tau-} + \iota Y_\tau) \mid \right. \\ &\quad \left. X_0 = x, Y_0 = y \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

这是一个最优控制和最优停时混合优化问题, 不难得 $V(x, y)$ 满足下列 Bellman 方程, 以下 V 的下脚标表示函数 $V(x, y)$ 关于对应的变量求一阶或二阶偏导数, 即

$$\begin{aligned} &\sup_c \{ (rx + b - c)V_x + U(c) \} + \nu y V_y + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 V_{yy} + \\ &\sup_{\theta} \left\{ \frac{1}{2} \theta^2 \sigma^2 V_{xx} + \theta [(\mu - r)V_x + \sigma \eta \rho y V_{xy}] \right\} - \beta V = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

根据模型的马尔科夫性及公司价值 Y 的连续性, 一定存在最优转换触发点 \bar{y} , 一旦公司价值等于 \bar{y} 便实施转换, 即最优转换停时 τ^* 满足 $\tau^* = \inf \{ t \geq 0, Y_t = \bar{y} \}$ 。若 $\{ t \geq 0, Y_t = \bar{y} \}$ 为空集, 则 τ^* 定义为 $+\infty$, 于是 \bar{y} 需满足价值匹配条件和价值光滑粘帖条件。价值匹配条件为

$$V(x, \bar{y}) = V^0(x + \iota \bar{y}) \quad (11)$$

价值光滑粘帖条件为

$$V_x(x, \bar{y}) = V_x^0(x + \iota \bar{y}) \quad (12)$$

$$V_y(x, \bar{y}) = \iota V_y^0(x + \iota \bar{y}) \quad (13)$$

(12)式表示投资前后最优目标函数关于决策者财富的边际变化率相等, (13)式表示投资前后最优目标函数关于公司价值的边际变化率相等。

由(3)式和(10)式得最优消费策略和最优对冲策略分别为

$$\begin{aligned} c^* &= -\frac{1}{\gamma} \ln V_x \\ \theta^* &= -\frac{(\mu - r)V_x + \sigma \eta \rho y V_{xy}}{\sigma^2 V_{xx}} \end{aligned} \quad (14)$$

(10)式可表示为

$$\begin{aligned} &(rx + b - c + \frac{1}{\gamma} \ln V_x - \frac{1}{\gamma})V_x + \nu y V_y + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 V_{yy} - \\ &\frac{[(\mu - r)V_x + \sigma \eta \rho y V_{xy}]^2}{2\sigma^2 V_{xx}} - \beta V = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

3.4 消费效用无差别定价

设 $D(y)$ 为可转换债券的消费效用无差别价格, 根据消费效用无差别原理, 投资者在当前时刻不投资可转换债券的最大消费总效用 $V^0(x)$ 与以价格 $D(y)$ 购买可转换债券所获得的最大消费总效用 $V(x, y)$ 相同, 即有 $V^0[x + D(y)] = V(x, y)$ 或 $V^0(x) = V(x - D(y), y)$ 。所以由(6)式, $D(y)$ 满足以下等式, 即

$$V(x, y) = -\frac{1}{r\gamma} \exp \left\{ 1 - \frac{\beta}{r} - r\gamma \left[x + \frac{\alpha^2}{2r^2\gamma} + D(y) \right] \right\} \quad (16)$$

将(16)式代入(11)式 ~ (15)式, 得到如下结果。

定理1 可转换债券的消费效用无差别价格 $D(y)$ 满足非线性常微分方程,即

$$rD(y) - b - (v - \rho\eta\frac{\mu - r}{\sigma})yD_y + \frac{1}{2}(1 - \rho^2)r\gamma\eta^2y^2D_y^2 - \frac{1}{2}\eta^2y^2D_{yy} = 0 \quad (17)$$

且 $D(y)$ 满足边界条件

$$D(\bar{y}) = \bar{c} \quad (18)$$

$$D_y(\bar{y}) = \iota \quad (19)$$

其中, D_y 为对函数 $D(y)$ 的一阶导数, D_{yy} 为对函数 $D(y)$ 的二阶导数,最优转换时刻 τ^* 满足 $\tau^* = \inf\{t \mid D(Y_t) \leq \bar{c}\}$ 。投资者投资前后的最优消费策略 c^* 和对冲策略 θ^* 分别满足

$$c_t^* = \begin{cases} \frac{\beta - r}{r\gamma} + r[x + \frac{\alpha^2}{2r^2\gamma} + D(y)] & 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{\beta - r}{r\gamma} + r(x + \frac{\alpha^2}{2r^2\gamma}) & t \geq \tau \end{cases} \quad (20)$$

$$\theta_t^* = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sigma r\gamma} - \frac{\eta\rho y D_y}{\sigma} & 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{\alpha}{\sigma r\gamma} & t \geq \tau \end{cases} \quad (21)$$

此外, $D(y)$ 关于 y 单调递增。

(17)式中中等号左侧的倒数第二项直接体现了投资者风险态度影响可转换债券价值的机理。在非完备市场中,厌恶系数越大,可转换债券价值越小。(18)式表明,若公司价值达到转换触发水平 \bar{y} ,则可转换债券会发生转换,转换价值为 \bar{c} ,这与完备市场的结果一致。(20)式表明最优消费恰好为固定消费与财富比例消费之和,投资者财富水平包括确定财富、可转换债券的效用无差别价值和隐含的风险投资的超额收益 $\frac{\alpha^2}{2r^2\gamma}$ 。在转换前,这些财富包括确定的流动性财富、隐含的投资可转换债券和风险投资的超额收益产生的财富水平;在转换后这些财富只包括流动性财富和隐含的风险投资的超额收益。并且由(20)式可知,时间的贴现系数 β (时间折扣因子)越大,现在的消费会越多。(21)式的第一个公式表明在转换之前的最优对冲策略由均值方差需求 $\frac{\alpha}{\sigma r\gamma}$

和套期保值需求 $\frac{\eta\rho}{\sigma}yD_y$ 共同决定。

4 数值分析

当前可转换债券定价往往以风险中性假设为前提,因而债券价格与投资者的风险态度无关。消费效用无差别定价理论充分考虑了风险态度在资产定价中的作用,但究竟风险态度等因素的具体影响如何,下面通过一些数值算例回答这些问题。

基本模型参数取值如下。无风险资产收益率 $r = 5\%$,可交易风险资产(市场组合)的回报率 $\mu = 9\%$ 、波动率 $\sigma = 25\%$,公司价值的年平均增长率 $v = 6.5\%$ 、波动率 $\eta = 40\%$,风险资产与公司价值的相关系数 $\rho = 0.70$,转换比率 $\iota = 0.10$,券息 $b = 1.5$ 万元,当前公司价值 $y = 100$ 万元,可转换债券投资者的风险厌恶系数 $\gamma = 1$ 。

4.1 风险厌恶系数的影响

在对风险厌恶系数 γ 的讨论中,若取基本模型参数,令 γ 取不同的值,并与完备市场情况做对比,结果如表1。这里的完备市场与通常的说法稍有差别,具体指不存在非系统风险或可以完全分散非系统风险^[15]。

由表1可知,随着债券持有者的风险厌恶程度提高(γ 增大),隐含价值和转换触发点 \bar{y} 会逐渐变小。因为投资者越厌恶风险,则对这种有风险的可转换债券的评价(消费效用无差别价格)越低,投资者为规避风险,就会降低投资触发水平(提前转换)。表面看来,这一结果有些矛盾,因为把债券转换成股票会招致更大的风险。但事实上,转换成股票后,投资者可以无交易成本地卖出全部或部分股票,投资于无风险证券,从而达到降低风险的目的。对于完备市场情况,债券持有人转换明显偏晚($\bar{y} = 1\,508.60$),若投资者是风险厌恶的,如风险厌恶系数 $\gamma = 0.50$ 时,就比完备市场情况转换时间早很多($\bar{y} = 771.60$)。

表1表明完备市场情况下可转换债券的价值最高,根据郑振龙等^[14]的实证结果,相比通常完备市场情况的定价,本研究得到的消费效用无差别价格明显贴近实际。

4.2 相关系数的影响

为便于直观分析,在此假设风险资产选用公司发行的股票,则股票与公司价值的相关性为正,且不会有太弱的相关性,以下讨论选用最弱的相关系数,

表1 风险厌恶系数的比较静态分析

Table 1 Comparative Static Analysis of the Risk Aversion Coefficients

风险厌恶系数 γ	完备市场	0.01	0.50	1.00	2.00	5.00
转换触发点 \bar{y} (万元)	1 508.60	1 438.60	771.60	642.90	539.20	440.50
债券隐含价值(万元)	34.08	34.03	32.93	32.43	31.88	31.19

表2 相关系数的比较静态分析($\gamma=0.10$)Table 2 Comparative Static Analysis of the Correlation Coefficients ($\gamma=0.10$)

相关系数 ρ	0.30	0.50	0.70	0.90	1.00
转换触发点 \bar{y} (万元)	1 402.00	1 238.60	1 121.20	1 036.80	1 004.50
债券隐含价值(万元)	36.01	34.69	33.70	32.94	32.62

表3 相关系数的比较静态分析($\gamma=10.00$)Table 3 Comparative Static Analysis of the Correlation Coefficients ($\gamma=10.00$)

相关系数 ρ	0.30	0.50	0.70	0.90	1.00
转换触发点 \bar{y} (万元)	366.40	372.80	390.20	456.80	1 004.50
债券隐含价值(万元)	30.75	30.76	30.84	31.27	32.62

即 $\rho = 0.30$ 。若令基本参数模型中 $\gamma = 0.10$, 令 ρ 取不同的值, 结果如表 2。

若令基本参数模型中 $\gamma = 10$, 令 ρ 取不同的值, 结果如表 3。

由表 2 可以看出, 随着公司价值与股票价格的相关性增强, 可转换债券的隐含价值和转换触发点 \bar{y} 不断变小。表 3 则得到完全相反的结果, 即随着 ρ 的增大, 可转换债券的隐含价值和转换触发点 \bar{y} 逐渐变大。这种看似矛盾的结果恰好说明一个重要的事实, 效用无差别定价综合考虑了风险和收益对资产定价的决定作用, 是风险和收益的权衡(折中), 而具体如何权衡决定于投资者的特定偏好(效用函数)。

事实上, 一方面, 随着公司价值与股票价格的相关性增强, 债券持有者越能借助风险资产对冲来自可转换债券(在转换之前)的风险, 因而债券持有人(仅从“风险减小了”这个角度看)认为可转换债券越有价值(消费效用无差别价格越大)。另一方面, 表 2 和表 3 的相关系数都大于零(正相关), 所以, 为了对冲可转换债券(在转换之前)的风险, 投资者必须卖空股票。然而, 表 2 和表 3 股票的平均收益是 9%, 高于无风险资产的收益 5%, 因而卖空股票就会显著减少投资组合的平均收益。这就说明债券持有人在构造投资组合时, 努力对冲可转换债券(在转换之前)的风险并不见得是个好策略。也就是说, 公司价值与股票价格相关性增强, 对债券持有人来说并不见得是件好事, 这还依赖于持有人如何权衡风险和收益的得失, 即依赖于持有人的风险态度 γ 。换一个角度看, 也可以这样理解, 债券价值和股票价格正相关, 若公司价值与公司股票价格相关性增强, 就意味着债券收益的提高和公司价值的提高经常同时出现, 债券更多地起着“锦上添花”的作用, 而不是像保险产品那样起着“雪中送炭”的作用, 根据资产定价

中的状态-价格理论^[23], 相关性越强, 就会在一定程度上减少债券的隐含价值。

综合起来, 可以解释表 2 和表 3 两种相反现象。

4.3 公司价值非系统风险波动率的影响

在公司价值非系统风险波动率的讨论中, 取基本模型参数, 在完备市场或风险厌恶系数 $\gamma = 1, \gamma = 2$ 时, 保持系统波动率 $\rho\eta = 0.28$ 不变, 令非系统风险波动率 $\sqrt{1-\rho^2}\eta$ 取不同的值, 如图 1 所示。

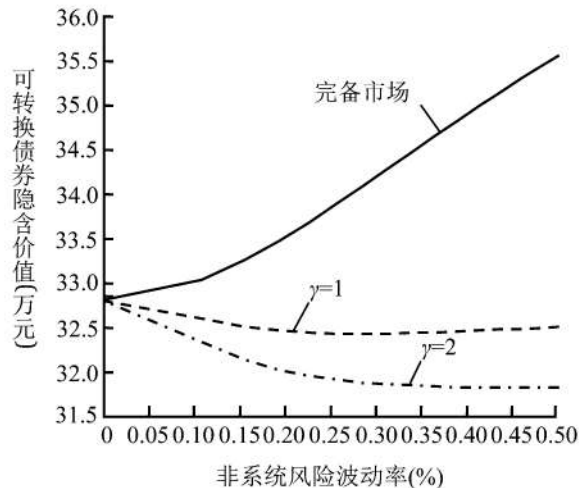


图1 非系统风险波动率
对可转换债券隐含价值的影响

Figure 1 Impact of Non-systematic Risk Volatility
on the Implied Value of Convertible Bonds

图 1 表明, 对于完备市场情况, 保持系统风险波动率不变, 可转换债券价值随着非系统风险波动率的增加而增大。因为在完备市场条件下, 非系统风险本身虽然不影响资产的定价, 但它的增加会显著

表4 风险资产价格波动率的比较静态分析
Table 4 Comparative Static Analysis of the Volatility of Risky Asset Price

波动率 σ	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
转换触发点 \bar{y} (万元)	611.70	666.00	697.80	718.60	733.20
债券隐含价值(万元)	31.98	32.77	33.26	33.60	33.84

提高可转换债券的内在价值。直观上,公司价值增大,债券持有者转换债券得到转换价值,公司价值减小,债券持有者可得固定利息;与此相反,若市场是非完备的,随着风险厌恶程度的增高,债券隐含价值随着非系统风险波动率的增加而减少。因为非系统风险是投资者不能分散的风险,非系统风险越大,投资者因厌恶风险自然对可转换债券价值的定价越低。特别指出,在非系统风险波动率为零时(尽管存在系统风险),投资者的风险态度对可转换债券价值没有影响。

4.4 风险资产价格波动率的影响

在对风险资产价格波动率的讨论中,取基本模型参数,令 σ 取不同的值,结果见表4。

从表4可以看出,随着风险资产价格波动率的增大,隐含价值和转换触发点也会增大。因为风险资产价格的波动率变大,风险也会变大。假设投资者不持有可转换债券,为了规避风险,就会选择减少风险资产权重的投资策略,使平均收益也随之减少。然而,一旦投资者拥有可转换债券,就可利用有较高收益率保障的可转换债券规避风险资产投资的风险,说明可转换债券在风险资产价值的波动率较大时更有投资价值(即隐含价值较大)。

4.5 初始公司价值的影响

取基本模型参数,在完备市场或风险厌恶系数 $\gamma = 1, \gamma = 2$ 时,令初始公司价值 y 取不同的值,结果如图2所示。

由图2可以看出,完备市场可转换债券的价值和转换触发点明显过高,随着初始公司价值 y 的增大,可转换债券隐含价值会增大,而转换触发点却保持不变。因为本研究的模型具有齐次马尔科夫性质,自然破产触发水平与初始资产水平无关。随着初始公司价值的减小,债券转换可能性变小,在没有违约条件的情况下,可转换债券的隐含价值曲线缓慢趋近于无风险债券价值 $\frac{b}{r} = 30$;随着初始公司价值的增大,可转换债券的隐含价值曲线会逐渐贴近右侧代表可转换债券转换价值的虚线($D(y) = cy$)。

5 结论

本研究在不完备市场条件下,基于消费效用无差别定价原理,给出可转换不可赎回债券的结构式定价方法和最优转换策略,利用动态规划原理和数理分析方法,得出最优转换触发点和隐含价值(即消

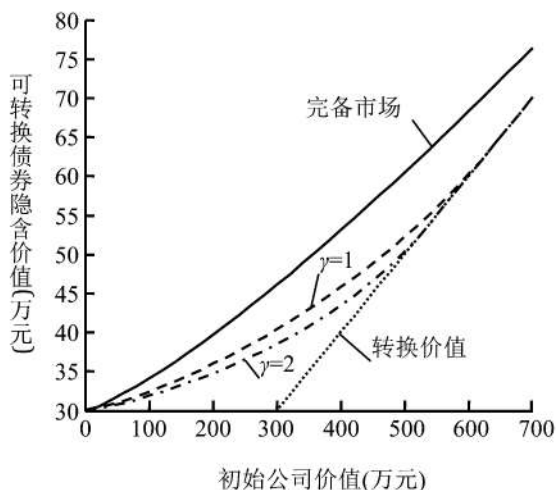


图2 初始公司价值对可转换债券隐含价值的影响
Figure 2 Impact of Initial Firm Value on the Implied Value of Convertible Bonds

费效用无差别价格)与风险厌恶系数、公司价值和风险资产价格之间的相关系数、公司价值的非系统风险波动率、初始公司价值的关系。研究表明,投资者的风险厌恶程度越高,转换触发点越低(即更早地实施转换),债券隐含价值越小;在投资者风险厌恶程度较高的情况下,相关系数越大,则推迟转换,隐含价值越大;在风险厌恶程度较低的情况下,相关系数越大,则提前转换,债券的隐含价值越小;同时,风险资产价格的波动率越大,则转换触发点越高,隐含价值越大;在完备市场条件下,债券隐含价值随公司价值非系统波动率的增大而增大,在非完备市场且风险厌恶系数较大时,债券隐含价值随公司价值非系统波动率的增大而减小;初始公司价值越大,隐含价值越大,而转换触发点不变。

本研究通过模型和数值计算,在一定的层面上揭示了可转换债券价格与一些重要的经济因素的数量关系,从理论上对可转换债券价格的变动规律有了更深刻的认识,研究结论可为债券理论分析人员、投资者、债券设计人员和债券发行者提供重要的理论参考。

参考文献:

[1] Merton R C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates [J]. The Journal of Fi-

- nance, 1974, 29(2):449-470.
- [2] Ingersoll J E, Jr. A contingent-claims valuation of convertible securities [J]. *Journal of Financial Economics*, 1977, 4(3):289-322.
- [3] Ingersoll J E, Jr. An examination of corporate call policies on convertible securities [J]. *The Journal of Finance*, 1977, 32(2):463-478.
- [4] Liao S L, Huang H H. Valuation and optimal strategies of convertible bonds [J]. *The Journal of Futures Markets*, 2006, 26(9):895-922.
- [5] Sirbu M, Pikovsky I, Shreve S E. Perpetual convertible bonds [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2004, 43(1):58-85.
- [6] Kühn C, Van Schaik K. Perpetual convertible bonds with credit risk [J]. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 2008, 80(6):585-610.
- [7] 赵洋, 赵立臣. 基于蒙特卡罗模拟的可转换债券定价研究 [J]. *系统工程学报*, 2009, 24(5):621-625.
Zhao Yang, Zhao Lichen. Monte Carlo-based pricing of convertible bonds [J]. *Journal of Systems Engineering*, 2009, 24(5):621-625. (in Chinese)
- [8] 朱艳芳, 张维. 基于风险价格均衡的可转换债券定价模型及实证研究 [J]. *天津大学学报: 社会科学版*, 2011, 13(6):493-497.
Zhu Yanfang, Zhang Wei. Pricing model and empirical analysis of convertible bonds based on risk-price equilibrium [J]. *Journal of Tianjin University: Social Sciences*, 2011, 13(6):493-497. (in Chinese)
- [9] 张卫国, 史庆盛, 许文坤. 基于全最小二乘拟蒙特卡罗方法的转债定价研究 [J]. *管理科学*, 2011, 24(1):82-89.
Zhang Weiguo, Shi Qingsheng, Xu Wenkun. Pricing model of convertible bonds in China by total least-squares Quasi-Monte Carlo method [J]. *Journal of Management Science*, 2011, 24(1):82-89. (in Chinese)
- [10] 李念夷, 陈懿冰. 基于违约风险的三叉树模型在可转债定价中的应用研究 [J]. *管理评论*, 2011, 23(12):26-31.
Li Nianyi, Chen Yibing. Trinomial tree with default risk and its application to pricing convertible bonds [J]. *Management Review*, 2011, 23(12):26-31. (in Chinese)
- [11] 杨大楷, 杜新乐, 刘庆生. 浅论我国可转换债券的定价及设计 [J]. *中国管理科学*, 2001, 9(4):7-15.
Yang Dakai, Du Xinle, Liu Qingsheng. The mechanism of CB pricing and designing in China [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2001, 9(4):7-15. (in Chinese)
- [12] 龚朴, 蒙坚玲, 何志伟. 具有巴黎期权特性的可转债有限元定价和策略分析 [J]. *系统工程*, 2007, 25(12):63-69.
Gong Pu, Meng Jianling, He Zhiwei. Valuation and strategic analysis of convertible bonds with the Parisian option feature using the finite element method [J]. *Systems Engineering*, 2007, 25(12):63-69. (in Chinese)
- [13] 龚朴, 蒙坚玲. 基于期权博弈的可转换债券最优策略分析 [J]. *管理工程学报*, 2009, 23(1):70-75.
Gong Pu, Meng Jianling. Optimal strategies analysis of convertible bonds based on option game [J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2009, 23(1):70-75. (in Chinese)
- [14] 郑振龙, 林海. 中国可转换债券定价研究 [J]. *厦门大学学报: 哲学社会科学版*, 2004(2):93-99.
Zheng Zhenlong, Lin Hai. On the pricing of convertible bonds in China [J]. *Journal of Xiamen University: Arts & Social Sciences*, 2004(2):93-99. (in Chinese)
- [15] Miao J, Wang N. Investment, consumption, and hedging under incomplete markets [J]. *Journal of Financial Economics*, 2007, 86(3):608-642.
- [16] Chen H, Miao J, Wang N. Entrepreneurial finance and non-diversifiable risk [J]. *The Review of Financial Studies*, 2010, 23(12):4348-4388.
- [17] Yang J, Yang Z. Consumption utility-based pricing and timing of the option to invest with partial information [J]. *Computational Economics*, 2012, 39(2):195-217.
- [18] 胡援成, 姜光明. 基于风险与收益对称的最优资本结构研究 [J]. *管理科学学报*, 2006, 9(5):75-81.
Hu Yuancheng, Jiang Guangming. Study on optimal capital structure: Based on trade off between return and risk [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2006, 9(5):75-81. (in Chinese)
- [19] 叶文忠, 杨招军, 郑毅. 抵押贷款证券的效用无差别定价 [J]. *中国管理科学*, 2010, 18(4):21-27.
Ye Wenzhong, Yang Zhaojun, Zheng Yi. Utility indifference pricing of mortgage-backed securities [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2010, 18(4):21-27. (in Chinese)
- [20] Leung T, Sircar R, Zariphopoulou T. Credit derivatives and risk aversion [J]. *Advances in Econometrics*, 2008, 22:275-291.
- [21] Sircar R, Zariphopoulou T. Utility valuation of multi-name credit derivatives and application to CDOs [J]. *Quantitative Finance*, 2010, 10(2):195-208.

- [22] Liang G, Jiang L. A modified structural model for credit risk [J]. IMA Journal of Management Mathematics, 2012, 23(2): 147-170.
- [23] Duffie D. Dynamic asset pricing theory [M]. 3rd ed. Princeton: Princeton University Press, 2001: 3-12.

Utility-Based Pricing of Perpetual Convertible Bonds

Wang Xiaolin, Yang Zhaojun

School of Finance and Statistics, Hunan University, Changsha 410079, China

Abstract: We assume that the value of a firm is observable in an incomplete market condition and the firm only issues shares and non-redeemable and non-defaulting perpetual convertible bonds with a fixed coupon rate. Bondholders have the right but not the obligation to convert the bonds into shares by a certain percentage. Based on the structural pricing model of convertible bonds, the study illustrates an optimal conversion strategy, deduces the semi-enclosed solution for the consumption utility-based indifference price of the bonds. Employing the finite difference method, we obtain the implied value (consumption utility-based indifference price) and the numerical solution on optimal consumption strategy and converting strategy of convertible bonds. The results show that bondholders' risk attitude and non-systematic risk has a significant impact on the optimal converting strategy and the implied value of convertible bonds. In contrast to the complete market, conversion trigger level is lower and the implied value of convertible bonds is less in the risk aversion condition. In addition, the higher the volatility of risk asset price is, the more the implied value of convertible bonds is.

Keywords: convertible bonds; incomplete market; utility indifference pricing; non-systematic risk

Received Date: October 2nd, 2012 **Accepted Date:** April 5th, 2013

Funded Project: Supported by the National Natural Science Foundation of China (70971037, 71171078, 71221001) and the Ph. D. Programs Foundation of Ministry of Education of China (20100161110022)

Biography: Wang Xiaolin, a Henan Anyang native (1986 -), is a Ph. D. candidate in the School of Finance and Statistics at Hunan University. Her research interest include financial engineering, etc. E-mail: wofan - 1986@163.com □