



随机波动 HJM 框架下可违约 债券市场波动结构的实证研究

苏云鹏, 杨宝臣

天津大学 管理与经济学部, 天津 300072

摘要:波动结构对于可违约债券及其衍生品的定价和风险管理具有重要意义。利用AAA级企业债券价格数据,基于中国可违约债券市场构建三因子可违约随机波动HJM模型,并对其进行有限维马尔科夫仿射实现。在此基础上,从波动因子的随机波动特征、相关性结构和贡献度3个方面对中国可违约债券市场的波动结构进行系统分析。研究表明,样本期内中国可违约债券隐含的无风险利率和信用利差的波动率中含有显著的随机波动过程,且其数值呈现持续增大的趋势;无风险短期利率、短期信用利差和随机波动过程3个主要波动因子之间存在显著的相关关系;各波动因子的风险贡献度随时间推移而发生明显的波动。在经济向好时期,无风险短期利率的风险贡献较大;在经济趋冷时期,短期信用利差的风险贡献占优。

关键词:随机波动; Heath-Jarrow-Morton框架; 违约远期利率; 信用利差; 波动结构

中图分类号:F830.91

文献标识码:A

doi:10.3969/j.issn.1672-0334.2015.01.010

文章编号:1672-0334(2015)01-0122-11

1 引言

随着中国金融市场的发展和完善,可违约债券得到迅猛发展,在沟通投资者与企业间投融资渠道、提高资本市场效率以及分散资本市场非系统性风险等方面的作用越来越重要。此外,由2008年金融危机可以看到,可违约债券和信用衍生品的定价以及风险管理对于保证金融稳定和经济安全具有十分重要的影响。

作为固定收益证券,可违约债券的定价和风险管理的核心在于经违约风险调整后的利率期限结构,也即违约利率期限结构。而利率期限结构的Heath-Jarrow-Morton(HJM)模型框架^[1]通过将漂移项表示为波动项的函数,使模型仅依赖于波动结构(即波动因子的个数、形式及相关性结构的设定),非常适合风险因子的刻画以及信用产品和衍生品的定价及风险管理,且模型设定具有灵活而广义的优点,因而在可违约债券及其衍生品的定价和风险管理中得到广泛应用。

HJM框架的本质属性决定了其模型仅依赖于波

动结构的设定,而Chiarella等^[2]的研究也表明,波动结构对可违约债券及其衍生品的价格和收益率的分布具有决定性作用。因此,对中国可违约债券市场波动结构进行深入分析,有助于明确中国可违约债券市场的主要风险源及其结构,对于可违约债券及其衍生品的定价和风险管理具有重要意义。

2 相关研究评述

Jarrow等^[3]和Duffie等^[4]通过将违约风险引入HJM框架,构建可违约HJM模型对可违约债券进行定价。在此模型框架下,Schönbucher^[5]通过引入多次违约机制,并在无违约利率期限结构模型基础上加入违约风险模块,得到相应的违约利率期限结构模型;Maksymiuk等^[6]在零回收率以及违约与无风险利率水平不相关假设下给出远期利率信用利差的HJM漂移项限制条件,并指出在此情形下初始信用利差期限结构与初始违约强度期限结构一致;Pugachevsky^[7]又将以上远期利率信用利差的HJM漂移项限制条件进一步推广至违约与无风险利率水平存在相关的情

收稿日期:2014-05-14 **修返日期:**2014-12-11

基金项目:国家自然科学基金(71171144);教育部人文社会科学研究青年基金(11YJCZH147);高等学校博士学科点专项科研基金(20130032120013);教育部长江学者和创新团队发展计划项目(IRT1028)

作者简介:苏云鹏(1982-),男,河北邢台人,管理学博士,天津大学管理与经济学部讲师,研究方向:金融工程、金融管理和经济计量方法与应用等。E-mail: ypsu@tju.edu.cn

形;Chiarella等^[8]在可违约HJM框架下,分别以Cox过程及其随机强度过程刻画违约事件和信用利差的变动,给出可违约债券和信用违约互换期权的数值定价方法。

然而,HJM框架下利率的动态特性一般是非马尔科夫的,也即具有路径依赖性,这会大大增加模型估计以及金融产品定价和风险管理的复杂程度,在加入违约风险模块后更是如此,从而限制了模型的实际应用。鉴于此,Chiarella等^[9]和Berndt等^[10]通过将波动结构设定为违约远期利率与时间的确定性函数,对可违约HJM框架进行有限维马尔科夫仿射实现。然而,Fouque等^[11]和Trolle等^[12]通过实证研究表明,可违约债券收益率曲线具有随机波动特性,对可违约债券及其衍生品的定价具有重要影响。因此,Chiarella等^[2]将随机波动引入可违约HJM框架,利用数值模拟方法对随机波动、相关系数和违约强度等模型参数对可违约债券价格和收益率分布的影响进行分析,发现波动因子形式及相关性结构的设定(也即波动结构的设定)对可违约债券及其衍生品的价格和收益率的分布具有决定性作用。

中国对于可违约债券市场的研究主要集中于定价模型的构建。一方面,通过放宽模型设定对现有模型进行改进,如在简化模型框架下分别通过引入随机违约强度^[13]、违约相关性^[14]、随机回收率^[15]、违约回复率^[16]、利率与违约强度的相关性设定^[17]等,构建相应的可违约债券定价模型。另一方面,通过引入额外风险因子对现有模型进行扩展,如在简化模型框架下分别将流动性风险^[18]和宏观经济风险因子^[19]引入可违约债券定价。作为可违约债券收益率的重要组成部分,信用利差的建模也是可违约债券定价模型研究的一个重要方面,已有研究分别基于时间序列模型^[20]、可违约HJM模型^[21]、仿射模型^[22]、混合模型^[23]和随机波动模型(SV模型)^[24]对中国可违约债券市场信用利差进行建模分析。

由以上分析可知,众多实证研究业已表明,波动因子形式、相关性结构和随机波动特征对可违约债券价格和收益率分布具有重要影响^[2,11-12]。因此,对中国可违约债券市场实际波动结构进行深入分析,明确其与国外市场的异同,对于中国可违约债券定价模型的设定及风险管理政策的制定具有重要意义。然而,迄今为止中国对于可违约债券的研究主要集中于定价模型理论方面,对于可违约债券市场

波动结构的系统实证研究则比较缺乏。

鉴于此,本研究基于可违约随机波动HJM模型框架,在对模型马尔科夫仿射实现基础上引入基于无损卡尔曼滤波的极大似然估计法对模型进行估计,以解决模型马尔科夫简化后仍存在的非线性及潜在状态变量问题,提高可违约利率模型的估计精度和债券定价准确性,进而在可违约随机波动HJM框架下,基于AAA级企业债券价格数据,从波动因子的个数和设定、相关性结构和贡献度3个方面对中国可违约债券市场的波动结构进行系统研究,以期明确驱动中国可违约债券市场的主要风险因子及其相关性结构和风险贡献度,为中国可违约债券及其衍生品的定价和风险管理提供参考。

3 违约利率期限结构的构建和初步分析

基于研究数据可得性,本研究选取2003年2月27日至2009年12月15日每周二的国债和AAA级企业债券日收盘价作为样本(遇节假日顺延),基于遗传算法的扩展Nelson-Siegel模型分别利用选取的国债数据和企业债券数据构建无风险利率期限结构和违约利率期限结构模型。表1给出样本期初初始无风险利率期限结构和初始违约利率期限结构的扩展Nelson-Siegel模型参数估计值和债券价格估计误差。

为了研究违约利率期限结构在时间和期限上的波动特性,本研究选取1年、5年、10年、15年和20年期违约利率时间序列进行分析,结果见图1。

由图1可知,自2007年3月美国次贷危机爆发开始,中国违约利率期限结构在整体水平迅速上升的同时出现负期限溢价现象,并随着美国次贷危机对中国经济影响的深化而愈发严重。这主要因为金融危机的发展引起全球资本市场信用紧缩,造成融资成本上升,同时还使公司财务压力和违约风险增大,从而推高了信用利差和违约利率期限结构的整体水平。而投资者出于对宏观经济前景的担忧,抛出短期债券并购进长期债券以锁定未来收益,从而引起可违约债券所隐含的无风险利率期限结构出现负期限溢价现象。

到了2008年9月,随着中国应对金融危机各项措施的出台,违约利率期限结构整体水平陡然下降,同时负期限溢价状况也得到了很大改善。央行通过降低基准利率并向资本市场大量注入流动性,降低了企业的融资成本,而中央财政通过支持企业信用担

表1 扩展Nelson-Siegel模型参数估计值和债券价格估计误差

Table 1 Parameter Estimates of Extended Nelson-Siegel Model and Prediction Biases of Bond Price

	β_0	β_1	β_2	τ_1	τ_2	误差均值	绝对误差均值
无风险	0.028	-0.027	0.007	0.480	0.176	0.178	0.331
违约	0.050	-0.005	-0.057	1.239	1.317	0.003	0.382

注: β_0 为扩展Nelson-Siegel模型的长期利率参数, β_1 为Nelson-Siegel模型的短期利率参数, β_2 为Nelson-Siegel模型的中期利率参数, τ_1 为模型的短期利率的指数衰减系数, τ_2 为模型的中期利率的指数衰减系数。

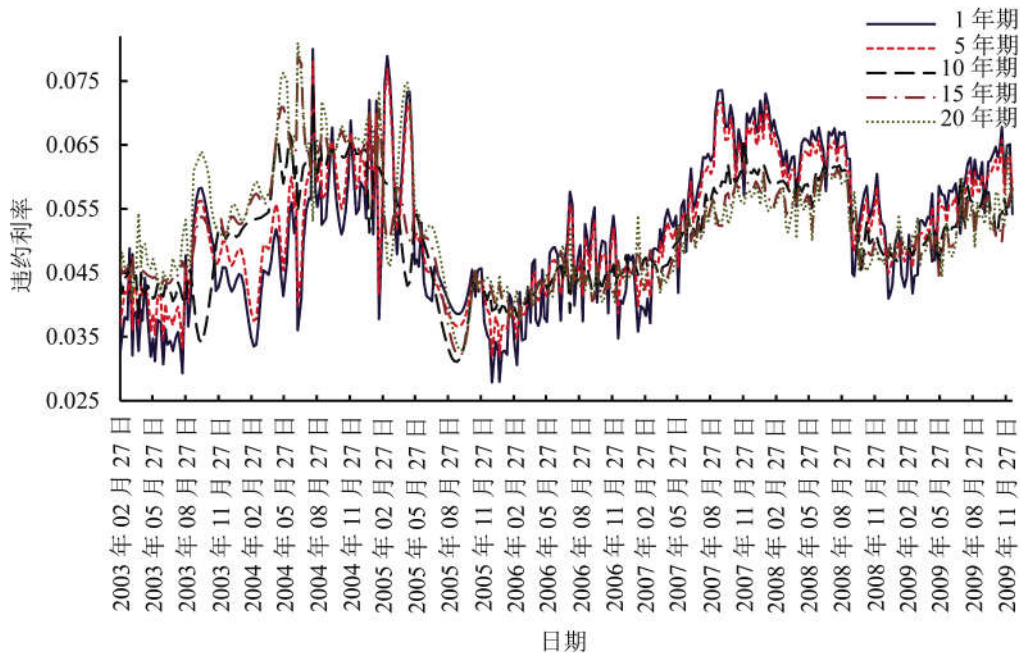


图1 各期限违约利率走势图

Figure 1 Defaultable Interest Rates for Different Terms to Maturity

保、清理收费项目等措施减轻企业负担,大大降低了企业债券的信用风险,从而使违约利率期限结构整体上大幅下降。而以上宏观调控政策的出台及其效果的逐渐显现极大地促进了市场信心的提升,投资者不再集中于长期债券,从而使违约利率期限结构的负期限溢价状况得到很大改善。

值得注意的是,2009年下半年中国违约利率期限结构的整体水平又开始逐步上升,并伴随一定程度的负期限溢价现象。这主要是因为受通胀及加息预期、股市资金分流、监管部门加大对商业银行监管和调控力度、市场对城投债偿还机制及能力产生隐忧等因素影响,可违约债券发行利率快速上升,从而提高了违约利率期限结构的整体水平。与此同时,虽然经济开始企稳回升,但基础尚不稳固,未来经济形势仍不明朗,因此大多数投资者仍持观望态度,更倾向于购进中、长期债券,使中、长期债券收益率低于短期债券收益率,从而引起负期限溢价现象。

为确定描述中国可违约债券市场波动所需的波动因子个数,本研究对以上构建的违约利率期限结构进行主成分分析,结果见表2。

由表2可知,各期限违约利率的变动可由前3个主成分进行解释,且解释比例达到0.994,表明中国可违约债券市场主要由3个波动因子驱动,因此可利用三因子可违约HJM模型对中国违约利率期限结构的动态特性进行刻画。

由图1可知,各期限违约利率时间序列均呈现明显的波动聚集特征,故本研究对其分布分别进行正态性检验和ARCH效应检验,结果见表3。

由表3可知,在0.050显著性水平下各期限违约利率时间序列均具有显著的ARCH效应,使违约利率

表2 违约利率期限结构的主成分分析结果
Table 2 Result of Principal Component Analysis for Term Structure of Defaultable Interest Rates

主成分序号	特征值	解释比例	累计解释比例
1	3.821	0.764	0.764
2	0.897	0.179	0.943
3	0.255	0.051	0.994
4	0.018	0.004	0.998
5	0.009	0.002	1.000

表3 各期限违约利率分布特征
Table 3 Distribution Features of Defaultable Interest Rates with Different Terms to Maturity

期限	Jarque-Bera	p 值	ARCH LM	p 值
1年期	451.480*	0.000	287.152*	0.000
5年期	14.302*	0.001	137.757*	0.000
10年期	9.447*	0.009	228.472*	0.000
15年期	9.095*	0.010	253.355*	0.000
20年期	222.879*	0.000	166.085*	0.000

注:*为参数在显著性水平0.050条件下显著,下同。

序列不服从正态分布,从而可能影响可违约债券及其衍生品定价精度和风险管理效果。实证研究表明,利率波动中的ARCH效应主要来源于波动率的水平依赖和随机波动特征^[25-26],因此在构建中国违约

利率期限结构模型时有必要纳入波动率的水平依赖和随机波动特征。

4 可违约随机波动HJM模型框架的构建

在以上对中国违约利率期限结构的初步分析基础上,本研究构建符合中国市场实际的可违约债券定价模型。由于现实中发生一次违约一般并不会终止债务合同,而是由公司在进行重组后重新偿付债务,因此本研究允许可违约债券发生多次违约,且设定 t 时刻回收率为 $\xi(t)$, $\xi(t) = \prod_{\tau_i \leq t} [1 - q(\tau_i)]$, τ_i 为第 i 个违约时刻, $q(\tau_i)$ 为随机面值损失率。在现实概率测度 \mathbf{P} 下,HJM框架将违约远期利率 $f^d(t, T, \omega)$ 分解为无违约远期利率 $f(t, T, \omega)$ 和信用利差 $\lambda(t, T, \omega)$,服从的随机积分方程分别为

$$f(t, T, \omega) = f(0, T) + \int_0^t \alpha^f(u, T, \omega) du + \int_0^t \sigma^f(u, T, \omega) dW^f(u) \quad (1)$$

$$\lambda(t, T, \omega) = \lambda(0, T) + \int_0^t \alpha^\lambda(u, T, \omega) du + \int_0^t \sigma^\lambda(u, T, \omega) dW^\lambda(u) \quad (2)$$

其中, T 为到期日, ω 为路径信息, u 为积分变量, $f(0, T)$ 为无违约远期利率的初始时刻取值, $\alpha^f(u, T, \omega)$ 为无违约远期利率的漂移项函数, $\sigma^f(u, T, \omega)$ 为无违约远期利率的扩散项函数, $W^f(u)$ 为无违约远期利率依赖的维纳过程, $\lambda(0, T)$ 为信用利差的初始时刻取值, $\alpha^\lambda(u, T, \omega)$ 为信用利差的漂移项函数, $\sigma^\lambda(u, T, \omega)$ 为信用利差的扩散项函数, $W^\lambda(u)$ 为信用利差依赖的维纳过程。

上文对于中国违约利率期限结构的分析表明,有必要将波动率的水平依赖和随机波动特征纳入违约利率期限结构模型。此外,实证研究表明无风险利率和信用利差的波动率还具有隐性随机波动特征,对于可违约债券及其衍生品的收益率分布和风险管理具有重要影响^[9-12]。鉴于此,本研究假设 $\sigma^f(t, T, \omega)$ 和 $\sigma^\lambda(t, T, \omega)$ 不仅依赖于相应状态变量水平,还受随机波动过程 $V(t)$ 驱动。同时,为对模型进行有限维马尔科夫仿射实现,将以上三者设定为

$$\sigma^f(t, T, \omega) = \bar{\sigma}_f \sqrt{r(t, \omega) V(t)} e^{-k_f(T-t)} \quad (3)$$

$$\sigma^\lambda(t, T, \omega) = \bar{\sigma}_\lambda \sqrt{\lambda(t, \omega) V(t)} e^{-k_\lambda(T-t)} \quad (4)$$

$$dV(t) = k_v [\bar{V} - V(t)] dt + \bar{\sigma}_v \sqrt{V(t)} dW^V(t) \quad (5)$$

其中, $\bar{\sigma}_f$ 为无风险利率的波动率系数, $\bar{\sigma}_f \geq 0$; $\bar{\sigma}_\lambda$ 为信用利差的波动率系数, $\bar{\sigma}_\lambda \geq 0$; $\bar{\sigma}_v$ 为随机波动过程的波动率系数, $\bar{\sigma}_v \geq 0$; k_f, k_λ, k_v 和 \bar{V} 为常数; $W^V(t)$ 为维纳过程。

当 $T = t$ 时, $f(t, T, \omega)$ 和 $\lambda(t, T, \omega)$ 即为无违约短期利率 $f(t, t, \omega)$ 和短期信用利差 $\lambda(t, t, \omega)$,分别简记为

$$r(t, \omega) \text{ 和 } \lambda(t, \omega)。 \text{ 令 } \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{pmatrix} \text{ 为维纳过程向量}$$

$W(t)$ 的相关矩阵, $W(t) = |W^V(t) \ W^\lambda(t) \ W^f(t)|'$, ρ_{ij} 为 $W(t)$ 第 i 个元素与第 j 个元素的相关系数。同时,令 $\phi(t)$ 为 $W(t)$ 对应的风险的市场价格向量, $\phi(t) = |\phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \phi_3(t)|'$, $\phi_1(t)$ 为 $W^V(t)$ 对应的风险的市场价格, $\phi_2(t)$ 为 $W^\lambda(t)$ 对应的风险的市场价格, $\phi_3(t)$ 为 $W^f(t)$ 对应的风险的市场价格。在风险中性测度 \mathbf{Q} 下,存在互不相关的维纳过程向量 \tilde{W}

$$(t), \tilde{W}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{W}_1(t) & \tilde{W}_2(t) & \tilde{W}_3(t) \end{pmatrix}', \text{ 满足 } dW(t) = \Omega \times [d\tilde{W}(t) + \phi(t) dt]$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_{12} & \sqrt{1-\rho_{12}^2} & 0 \\ \rho_{13} & \frac{\rho_{23}-\rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}} & \sqrt{\frac{1-\rho_{12}^2-\rho_{13}^2-\rho_{23}^2+2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho_{12}^2}} \end{pmatrix}$$

此时,由Chiarella等^[2]研究中的命题3.2可知,无违约短期利率 $r(t, \omega)$ 、短期信用利差 $\lambda(t, \omega)$ 和随机波动过程 $V(t)$ 分别服从如下随机微分方程,即

$$dr(t, \omega) = [\theta_f(t, \omega) + \eta_1(t, \omega) - k_f r(t, \omega)] dt + \sum_{i=1}^3 a_{3i} \bar{\sigma}_f \sqrt{r(t, \omega) V(t)} d\tilde{W}_i(t) \quad (6)$$

$$d\lambda(t, \omega) = [\theta_\lambda(t, \omega) + \eta_2(t, \omega) + 2\eta_3(t, \omega) - (k_f - k_\lambda) S_3(t, \omega) + k_\lambda \lambda(t, \omega)] dt + \sum_{i=1}^3 a_{2i} \bar{\sigma}_\lambda \sqrt{\lambda(t, \omega) V(t)} d\tilde{W}_i(t) \quad (7)$$

$$dV(t) = [k_v [\bar{V} - V(t)] + \sum_{i=1}^3 a_{1i} \bar{\sigma}_v \phi_i(t) \sqrt{V(t)}] dt + \sum_{i=1}^3 a_{1i} \bar{\sigma}_v \sqrt{V(t)} d\tilde{W}_i(t) \quad (8)$$

其中, $\theta_f(t, \omega) = f_2(0, t) + k_f f(0, t)$, $\theta_\lambda(t, \omega) = \lambda_2(0, t) + k_\lambda \lambda(0, t)$, $f(0, t)$ 为初始收益率曲线, $\lambda(0, t)$ 为初始信用利差曲线, $f_2(0, t)$ 为初始收益率曲线的斜率, $\lambda_2(0, t)$ 为初始信用利差曲线的斜率, a_{ij} 为矩阵 Ω 的第 i 行第 j 列元素, $\phi_i(t)$ 为向量 $\phi(t)$ 的第 i 个元素, η_1, η_2, η_3 和 S_3 为辅助状态变量,服从以下随机过程,即

$$d\eta_1(t, \omega) = [\sum_{i=1}^3 a_{3i}^2 \bar{\sigma}_f^2 r(t, \omega) V(t) - 2k_f \eta_1(t, \omega)] dt \quad (9)$$

$$d\eta_2(t, \omega) = [\sum_{i=1}^3 a_{2i}^2 \bar{\sigma}_\lambda^2 \lambda(t, \omega) V(t) - 2k_\lambda \eta_2(t, \omega)] dt \quad (10)$$

$$d\eta_3(t, \omega) = [\sum_{i=1}^3 a_{3i} a_{2i} \bar{\sigma}_f \bar{\sigma}_\lambda \sqrt{r(t, \omega) \lambda(t, \omega) V(t)} - (k_f + k_\lambda) \eta_3(t, \omega)] dt \quad (11)$$

$$dS_3(t, \omega) = [\eta_3(t, \omega) - k_f S_3(t, \omega)] dt \quad (12)$$

需要注意,辅助状态变量 η_1, η_2, η_3 和 S_3 刻画了模型状态变量 $r(t, \omega)$ 和 $\lambda(t, \omega)$ 的历史路径信息,而以

上辅助状态变量表达式中不含有随机驱动项(即局部确定性变量),因此通过将这些辅助状态变量引入模型状态空间,即可对(6)式~(8)式所定义的三因子可违约随机波动HJM模型进行有限维马尔科夫仿射实现,使其具有很好的解析特性,从而为下文利用基于无损卡尔曼滤波的极大似然估计法对模型进行估计,进而对中国可违约债券市场的波动结构进行实证研究提供便利。

可以看到,风险的市场价格 $\phi_i(t)$ 出现在随机波动过程 $V(t)$ 的漂移项中,表明由于随机波动过程包含的隐性随机波动因子只作用于衍生品价格而不影响债券的收益率曲线,因此不能仅依靠债券自身对冲其面临的波动风险。由于 $a_{11} = 1, a_{12} = a_{13} = 0$, 本研究仅对 $\phi_1(t)$ 做形式设定,不失一般性,令 $\phi_1(t) = \sqrt{V(t)}$ 。同时,定义确定性函数 $\delta_f(t, T) = \int_t^T e^{-k_f(t-s)} dv$, $\delta_\lambda(t, T) = \int_t^T e^{-k_\lambda(t-s)} dv$, v 为积分变量,则由 Chiarella 等^[2] 研究中的命题 3.3 可知,此时可违约债券价格公式具有的指数仿射形式为

$$P^d(t, T) = \frac{\bar{P}^d(0, T)}{\bar{P}^d(0, t)} \exp[-D(t, T) - \delta_f(t, T)\chi_f(t, \omega) - \delta_\lambda(t, T)\chi_\lambda(t, \omega)] \quad (13)$$

其中, $P^d(t, T)$ 为 t 时刻到期日为 T 的违约零息债券价格; $\bar{P}^d(0, t)$ 为到期日为 t 的违约零息债券在初始时刻临近违约的价格,满足 $\bar{P}^d(0, t) = \exp[-\int_0^t f^d(0, s, \omega) ds]$; $\bar{P}^d(0, T)$ 为到期日为 T 的违约零息债券在初始时刻临近违约的价格,满足

$$\begin{aligned} \bar{P}^d(0, T) &= \exp[-\int_0^T f^d(0, s, \omega) ds] \\ \chi_f(t, \omega) &= r(t, \omega) - f(0, t) \\ \chi_\lambda(t, \omega) &= \lambda(t, \omega) - \lambda(0, t) \end{aligned}$$

且 $D(t, T) = -\ln \xi(t) + \frac{1}{2} \delta_f^2(t, T) \eta_1(t, \omega) + \frac{1}{2} \delta_\lambda^2(t, T) \eta_2(t, \omega) + G(t, T) \eta_3(t, \omega) + [\delta_f(t, T) + \delta_\lambda(t, T)] S_3(t, \omega)$

$$G(t, T) = \frac{1}{k_f} \delta_f(t, T) + \frac{1}{k_\lambda} \delta_\lambda(t, T) + \frac{1}{k_f k_\lambda} [1 - e^{-(k_f + k_\lambda)(T-t)}]$$

5 中国可违约债券市场的波动结构分析

基于上文构建的可违约随机波动HJM模型,利用3.1节的违约利率期限结构数据,对中国可违约债券市场的波动结构进行系统分析,明确市场的主要风险源及其结构,从而为中国可违约债券的定价和风险管理提供参考和依据。

5.1 随机波动效应分析

为考察中国违约利率期限结构的随机波动特征及其对于可违约债券定价精度的影响,本研究对(5)式的参数给出两种设定。① $k_v = \bar{\sigma}_v = 0$, 也即 $V(t)$ 为

常数,不妨令 $V(t) = \bar{V}$, 此时为水平依赖波动模型,记为HJM₁; ② $\bar{\sigma}_v > 0$, 此时为随机波动模型,记为HJM_s。在以上两种设定下,(6)式~(12)式构成违约利率期限结构的状态空间模型中的状态方程,(13)式则为相应的观测方程。基于选取的1年、5年、10年、15年和20年期违约利率数据,对以上两种设定下的违约利率期限结构的状态空间模型利用基于无损卡尔曼滤波的极大似然估计法分别进行估计,结果见表4。

表4 模型估计结果
Table 4 Parameter Estimates of Models

	HJM ₁ 模型		HJM _s 模型	
	估计值	标准差	估计值	标准差
k_f	0.159*	0.037	0.199*	0.022
k_λ	1.098*	0.169	0.316*	0.044
k_v			0.060*	0.006
$\bar{\sigma}_f$	0.027*	0.012	0.617*	0.074
$\bar{\sigma}_\lambda$	0.059*	0.026	0.763*	0.053
$\bar{\sigma}_v$			0.407*	0.069
\bar{V}	0.388*	0.032	0.275*	0.024
ρ_{12}	0.009	0.191	0.265*	0.013
ρ_{13}			0.856*	0.065
ρ_{23}			0.549*	0.024
r_0	0.001	0.011	0.007*	0.001
λ_0	0.001	0.008	0.005*	0.001
对数似然值 L_R	830.365		1 808.974	

注:由于中国可违约债券市场缺乏回收率数据,故本研究参照穆迪公司的研究报告《Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2008》,设定回收率 $\xi(t) = 53.400\%$ 。

由表4可知,两种设定下的违约利率期限结构模型绝大部分参数估计值在统计上显著,表明本研究采用的基于无损卡尔曼滤波的极大似然估计法有效。此外,随机波动过程的引入大幅提高了模型的数据拟合优度,模型的对数似然值由HJM₁模型的830.365大幅提高至HJM_s模型的1 808.974。对HJM_s模型相对于HJM₁模型的优越性进行似然比检验,结果显示似然比统计量 $LR_{ss} = 1 957.219$, 在0.050水平下显著,表明随机波动的引入显著提高了模型对于违约利率期限结构的数据拟合优度,可以更好地刻画违约利率期限结构的波动特性。

为进一步考察随机波动的引入对可违约债券定价精度的影响,本研究基于以上模型参数估计值,计算两种模型设定下各期限可违约债券价格的估计值,其误差统计量见表5。

表5 各期限可违约债券价格估计误差统计量
Table 5 Pricing Error Statistics for Defaultable Bonds with Different Terms to Maturity

期限	HJM ₁ 模型			HJM ₂ 模型		
	RMSE	Jarque-Bera	ARCH LM	RMSE	Jarque-Bera	ARCH LM
1 年期	1.913	223.902 *	6.239 *	0.315	6.251 *	3.599
5 年期	1.796	177.335 *	5.773 *	0.291	5.981	3.217
10 年期	1.772	175.873 *	5.758 *	0.283	5.931	2.830
15 年期	1.666	165.706 *	5.689 *	0.262	5.829	2.626
20 年期	1.825	203.212 *	5.825 *	0.274	6.269 *	3.762

由表5可知, HJM₂模型对于各期限可违约债券价格估计值的均方根误差(RMSE)均明显小于HJM₁模型。此外,估计误差序列的Jarque-Bera统计量和ARCH LM统计量表明,随机波动的引入还显著改善了估计误差的分布特征。各期限可违约债券价格估计误差序列的ARCH LM统计量由HJM₁模型的5.600以上显著降至HJM₂模型的3左右,在0.050显著性水平下不再显著,表明随机波动设定解释了违约利率波动的ARCH效应和尖峰厚尾分布特征,从而使可违约债券价格估计误差分布更趋向于正态分布,这从估计误差序列的Jarque-Bera统计量由HJM₁模型的165以上锐减至HJM₂模型的6左右即可看出。

综上,本研究设定的三因子可违约随机波动HJM模型通过引入随机波动因子,刻画了中国违约利率期限结构的随机波动特征,大幅改善了可违约债券定价精度和误差分布特征,可作为分析中国可违约债券市场波动结构的可靠模型框架。

5.2 波动因子相关性结构分析

由表4的HJM₂模型参数 ρ_{12} 、 ρ_{13} 和 ρ_{23} 估计值可知,无风险短期利率 $r(t, \omega)$ 、短期信用利差 $\lambda(t, \omega)$ 和随机波动过程 $V(t)$ 之间存在显著相关关系,随机波动过程 $V(t)$ 与无风险短期利率 $r(t, \omega)$ 的相关系数高达0.856,而与短期信用利差 $\lambda(t, \omega)$ 相关系数为0.265,表明随机波动过程 $V(t)$ 对二者的波动具有重要影响,也就是说无风险短期利率和短期信用利差的动态特性具有显著随机波动特征。此外,值得注意的是, ρ_{23} 的估计值为0.549,表明无风险短期利率 $r(t, \omega)$ 与短期信用利差 $\lambda(t, \omega)$ 呈现显著的正相关关系,这与Duffee^[27]和Chen等^[28]的结论恰恰相反,这主要是因为在中国和美国债券市场上,影响无风险利率和信用利差的主要因素不同。在美国债券市场上,影响无风险利率和信用利差的因素主要是经济增长(或经济周期)^[27-30]。当经济下滑时,美联储往往会持续降息,并向市场大量注入流动性,这些经济刺激措施均会使无风险利率水平下降。与此同时,经济下滑使企业的现金流和盈利水平等受到负面冲击,因此企业债券的信用风险加大,信用利差表现为上升。

因此,在美国债券市场上信用利差与无风险利率呈负相关关系。而实证研究表明,在中国债券市场上,影响无风险利率和信用利差的因素主要是通货膨胀和资金供给,其次才是经济增长。而且通货膨胀对无风险利率和信用利差均为正向影响,资金供给对两者均为负向影响^[31]。通胀水平高涨时,投资者会要求更高的无风险利率和信用利差来补偿通胀带来的货币贬值损失;而市场资金充裕时,债券供求关系则会倾向卖方,从而使无风险利率和信用利差走低。因此,在中国债券市场上信用利差与无风险利率呈正相关关系。

5.3 波动因子贡献度分析

本研究以15年期AAA级企业债券为例,基于三因子可违约随机波动HJM模型对各波动因子的贡献度及其变动进行分析,借以刻画各因子的风险贡献度及其波动。图2给出15年期AAA级企业债券价格与估计值的对比。

在图2中,样本期内15年期AAA级企业债券价格均值为46.600,而估计误差均值为0.138,误差比为0.296%,因此本研究构建的三因子可违约随机波动HJM模型很好地刻画了15年期可违约债券价格的动态特性,其隐含的违约短期利率 $r^d(t, \omega)$ 的波动率变动情况见图3。

在图3中,样本期内15年期可违约债券价格所隐含的违约短期利率波动率均值为3.756%。在2003年2月27日至2005年2月16日,违约短期利率波动率持续增大,意味着违约短期利率的波动性持续上升;在2005年2月17日至2008年9月11日,违约短期利率波动率逐步减小,意味着违约短期利率的波动性持续平稳下降;在2008年9月19日之后迅速降至一个历史低点并保持至2009年5月25日,此段时间内违约短期利率的运行比较平稳;此后,违约短期利率波动率又开始迅速震荡上升,意味着违约短期利率的波动性开始迅速反弹。

由图3可以看出,样本期内违约利率波动率的变动越来越剧烈且呈现明显的波动聚集特征。因此,本研究对驱动违约利率波动率变动的随机波动过程



图2 15年期企业债券价格和估计值

Figure 2 Actual and Predicted Prices of 15-year Corporate Bond

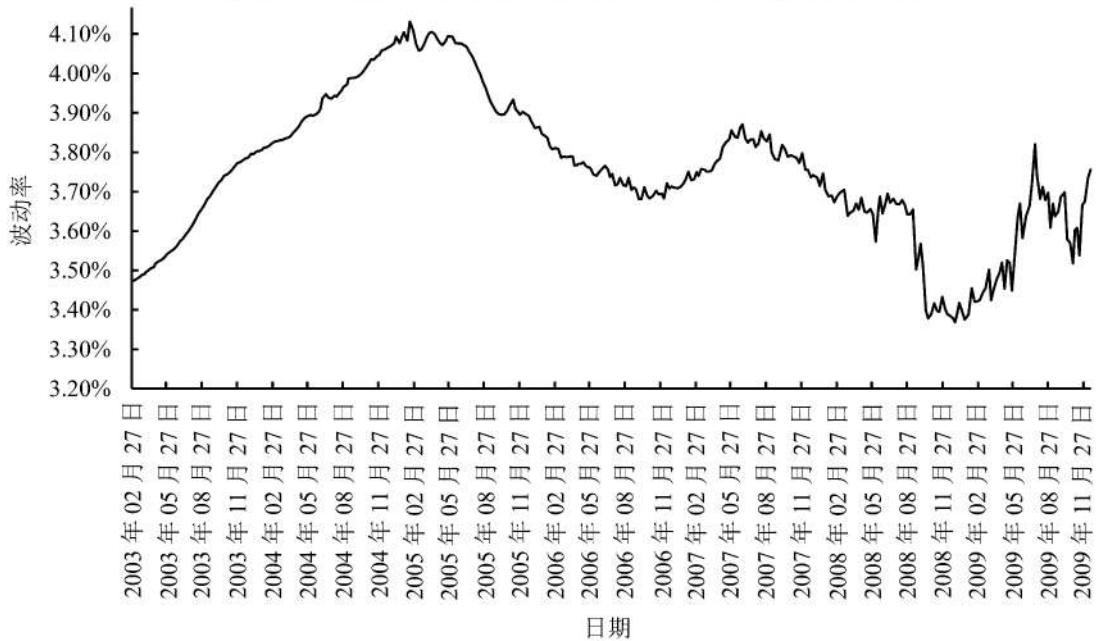


图3 违约短期利率波动率

Figure 3 Volatility of Defaultable Short Rate

$V(t)$ 进行提取和分析,结果见图4。

由图4可知,样本期内违约利率波动率中所隐含的随机波动过程 $V(t)$ 呈现持续增大的趋势,这就解释了违约利率波动的变动加剧及波动聚集现象,同时也表明中国可违约债券收益率曲线具有越来越明显的随机波动特性。因此,在对可违约债券及其衍生品进行定价和风险管理时必须将违约利率期限结构的随机波动特征纳入考量。

由于随机波动过程通过无风险利率和信用利差的波动率作用于违约短期利率,因此本研究只给出

无风险短期利率和短期信用利差两个因子对违约短期利率波动率的贡献百分比变动情况,见图5。为了与违约利率走势进行对比,图5还给出15年期AAA级企业债券收益率变动情况。

由图5可知,各因子对于违约短期利率波动率的贡献百分比随着时间的推移而发生明显的波动,与违约利率走势进行对比可以发现,在违约利率上行期间,无风险短期利率对违约短期利率波动率的贡献较大,表明此时期利率风险对可违约债券定价的影响更大;在违约利率下行期间,短期信用利差对违约

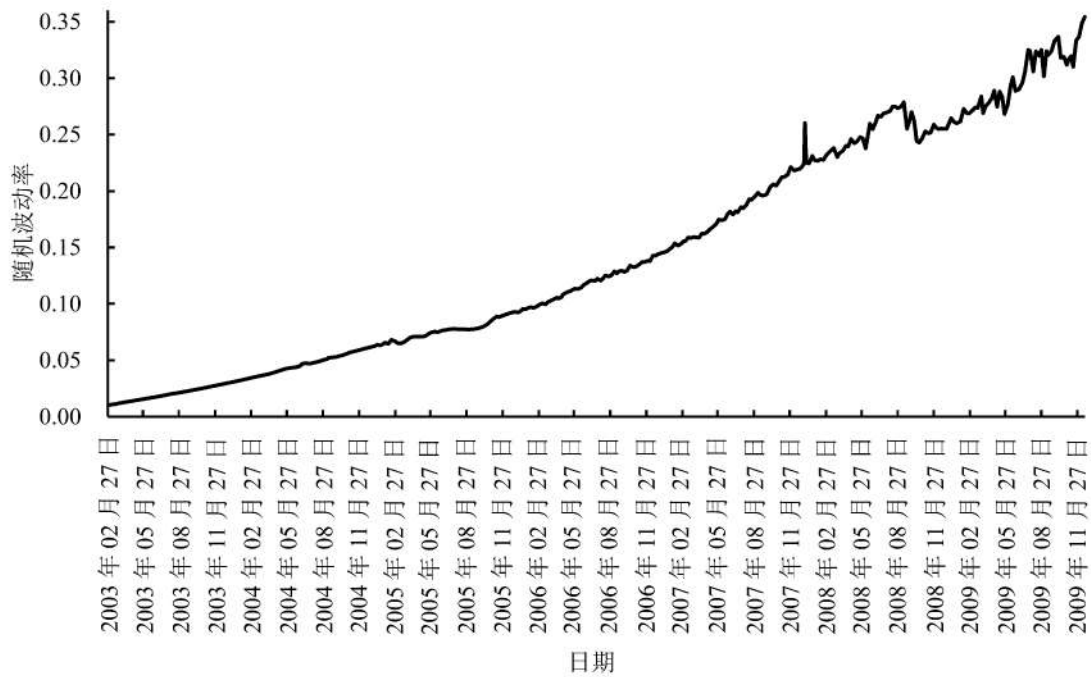


图4 随机波动过程

Figure 4 Stochastic Volatility Process

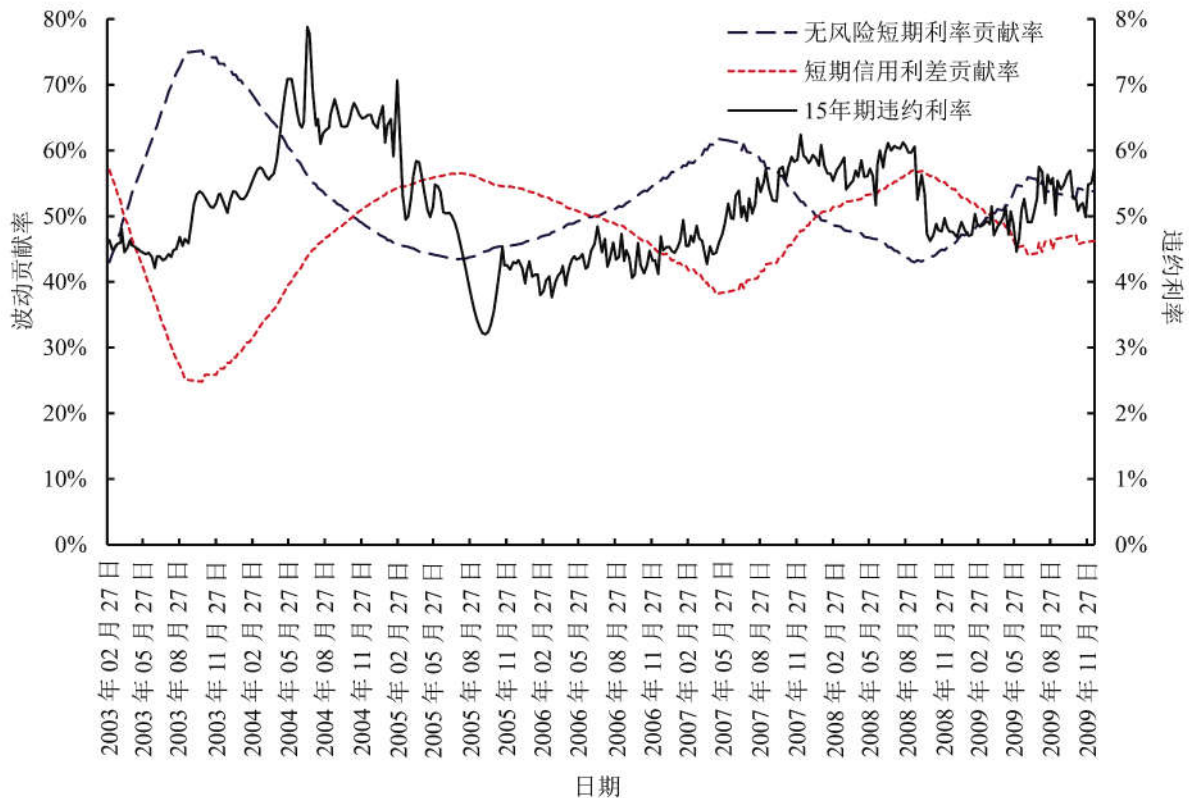


图5 各波动因子对违约短期利率波动率的贡献百分比

Figure 5 Contribution of Each Factor to the Volatility of Instantaneous Defaultable Short Rate

短期利率波动率的贡献占优,表明此时期信用风险对可违约债券定价的影响更大。这是因为,由前文结论可知,无风险短期利率与短期信用利差呈显著的正相关关系,从而使违约利率与无风险利率同向变动。因此,违约利率上行时期无风险利率也上行,

此时往往是经济向好、企业的现金流和盈利水平改善时期,故企业债券的违约概率降低,相对于信用风险来说,投资者在要求收益率时更加注重利率风险,使无风险短期利率对违约短期利率波动率具有更大的贡献;反之,违约利率下行时期无风险利率也下

行,此时往往是经济趋冷、企业的现金流和盈利水平变差时期,故企业债券的违约概率上升,投资者在要求收益率时更加注重信用风险,使短期信用利差对违约短期利率波动率具有更大的贡献。

在样本期内进行平均,无风险短期利率对违约短期利率波动率的解释部分为53.250%,短期信用利差的解释部分为46.750%。

6 结论

基于中国可违约债券市场实际,本研究构建三因子可违约随机波动HJM模型,并对其进行有限维马尔科夫仿射实现。通过考察所建模型相对于可违约水平依赖波动HJM模型的优越性,分析中国违约利率期限结构的随机波动效应及其对可违约债券定价精度和误差分布的影响。在此基础上,基于三因子可违约随机波动HJM模型对中国可违约债券市场波动结构进行系统研究,得到以下结论。

(1)样本期内中国可违约债券隐含的无风险利率和信用利差的波动率中含有显著的随机波动过程,且其数值呈持续增大的趋势,从而引起违约利率波动的变动加剧和波动聚集现象,对于可违约债券的定价和收益率分布具有重要影响。因此,在对中国可违约债券及其衍生品进行定价和风险管理时,应充分考虑利率风险和信用风险的随机波动特征,以减小定价偏差,改善对冲效果。

(2)作为中国可违约债券市场的3个主要波动因子,无风险短期利率、短期信用利差和随机波动过程之间存在显著的相关关系,无风险短期利率与短期信用利差呈显著的正相关关系,这与美国债券市场情形存在差异,这主要由中国与美国债券市场上影响无风险利率和信用利差的主要因素存在差异所造成。因此,在对中国可违约债券及其衍生品进行定价和风险管理时应充分分析和把握中国市场实际,正确利用利率风险与信用风险的交互作用。

(3)中国可违约债券市场上各波动因子的风险贡献度随时间的推移发生明显的波动。在经济向好时期,无风险短期利率波动因子对违约短期利率波动率的贡献较大,表明此时期利率风险对可违约债券定价的影响更大;在经济趋冷时期,短期信用利差波动因子对违约短期利率波动率的贡献占优,表明此时期信用风险对可违约债券定价的影响更大。因此,对可违约债券及其衍生品的风险管理的重心应随经济周期的变动进行相应调整,在不同经济周期阶段突出相应的主要风险因子,从而使风险管理策略更加高效而有针对性,从而达到既改善风险管理效果又节省对冲成本的目的。

由于篇幅所限,本研究仅选取AAA级企业债券为样本展开研究,对其他级别的企业债券和其他品种的可违约债券没有涉及,可能会对结论的全面性和普适性造成一定影响。未来的研究可对其他级别的企业债券和其他品种的可违约债券展开分析,以期获得更加全面的研究结论。

参考文献:

- [1] Heath D, Jarrow R, Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation [J]. *Econometrica*, 1992, 60(1): 77-105.
- [2] Chiarella C, Maina S C, Sklibosios C N. Credit derivatives pricing with stochastic volatility models [J]. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2013, 16(4): 1350019-1-1350019-28.
- [3] Jarrow R A, Turnbull S M. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk [J]. *The Journal of Finance*, 1995, 50(1): 53-85.
- [4] Duffie D, Singleton K J. Modeling term structures of defaultable bonds [J]. *The Review of Financial Studies*, 1999, 12(4): 687-720.
- [5] Schönbucher P J. Term structure modelling of defaultable bonds [J]. *Review of Derivatives Research*, 1998, 2(2/3): 161-192.
- [6] Maksymiuk R, Gatarek D. Applying HJM to credit risk [J]. *Risk*, 1999, 12(5): 67-68.
- [7] Pugachevsky D. Generalising with HJM [J]. *Risk*, 1999, 12(8): 103-105.
- [8] Chiarella C, Fanelli V, Musti S. Modelling the evolution of credit spreads using the cox process within the HJM framework: A CDS option pricing model [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 208(2): 95-108.
- [9] Chiarella C, Sklibosios C N, Schlögl E. A Markovian defaultable term structure model with state dependent volatilities [J]. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2007, 10(1): 155-202.
- [10] Berndt A, Ritchken P, Sun Z. On correlation and default clustering in credit markets [J]. *The Review of Financial Studies*, 2010, 23(7): 2680-2729.
- [11] Fouque J P, Sircar R, Sölna K. Stochastic volatility effects on defaultable bonds [J]. *Applied Mathematical Finance*, 2006, 13(3): 215-244.
- [12] Trolle A B, Schwartz E S. A general stochastic volatility model for the pricing of interest rate derivatives [J]. *The Review of Financial Studies*, 2009, 22(5): 2007-2057.
- [13] 梁世栋, 郭脉, 方兆本. 可违约债券期限结构模型 [J]. *系统管理学报*, 2005, 14(2): 166-170.
Liang Shidong, Guo Bing, Fang Zhaoben. The analysis of a term structure model for defaultable bonds [J]. *Journal of Systems & Management*, 2005, 14(2): 166-170. (in Chinese)
- [14] 吴春军, 傅毅, 张寄洲. 双时段具违约相关性的公司债券定价 [J]. *上海师范大学学报: 自然科学版*, 2010, 39(5): 517-523.
Wu Chunjun, Fu Yi, Zhang Jizhou. Pricing of corporate bonds with default correlation in a double-time

- period [J]. *Journal of Shanghai Normal University : Natural Sciences*, 2010, 39 (5): 517 - 523. (in Chinese)
- [15] 潘坚, 周香英. 在约化模型下具有随机回收率的公司债券定价 [J]. *经济数学*, 2011, 28 (3): 92 - 96.
Pan Jian, Zhou Xiangying. Pricing corporate bond with stochastic recovery rate under the reduced-form model [J]. *Journal of Quantitative Economics*, 2011, 28 (3): 92 - 96. (in Chinese)
- [16] 崔伶俐. 反射 CEV 模型与可违约债券定价 [J]. *电子科技*, 2013, 26 (12): 23 - 26.
Cui Lingli. Reflected CEV processes and pricing of defaultable bonds [J]. *Electronic Science and Technology*, 2013, 26 (12): 23 - 26. (in Chinese)
- [17] 陆金荣, 陈荣达. 一个可违约零息债券双因素强度定价模型及其极大似然估计 [J]. *系统工程*, 2010, 28 (11): 21 - 25.
Lu Jinrong, Chen Rongda. A two-factor intensity pricing model for defaultable bonds and its maximum likelihood estimation [J]. *Systems Engineering*, 2010, 28 (11): 21 - 25. (in Chinese)
- [18] 崔长峰, 刘海龙. 基于债权终止的可违约债券定价 [J]. *中国管理科学*, 2012, 20 (4): 8 - 17.
Cui Changfeng, Liu Hailong. The pricing of defaultable bond based on claim termination [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2012, 20 (4): 8 - 17. (in Chinese)
- [19] 郭培栋, 陈启宏. 考虑宏观经济变量的可违约债券定价 [J]. *东北师大学报: 自然科学版*, 2013, 45 (3): 51 - 56.
Guo Peidong, Chen Qihong. Pricing of default bond under macroeconomics variance [J]. *Journal of Northeast Normal University : Natural Science Edition*, 2013, 45 (3): 51 - 56. (in Chinese)
- [20] 冯宗宪, 郭建伟, 孙克. 企业债的信用价差及其动态过程研究 [J]. *金融研究*, 2009 (3): 54 - 71.
Feng Zongxian, Guo Jianwei, Sun Ke. The study of credit spread and dynamic process of corporate bond [J]. *Journal of Financial Research*, 2009 (3): 54 - 71. (in Chinese)
- [21] 李春林, 李冬连. 随机波动 HJM 框架下信用利差模型及实证研究 [J]. *统计与信息论坛*, 2011, 26 (9): 9 - 15.
Li Chunlin, Li Donglian. An empirical research on credit spread model under the default HJM framework with stochastic volatility [J]. *Statistics & Information Forum*, 2011, 26 (9): 9 - 15. (in Chinese)
- [22] 周荣喜, 杨杰, 杨丰梅. 基于仿射过程的企业债信用价差期限结构模型 [J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33 (12): 3061 - 3067.
Zhou Rongxi, Yang Jie, Yang Fengmei. Term structure model of corporate bond credit spread based on affine processes [J]. *Systems Engineering - Theory & Practice*, 2013, 33 (12): 3061 - 3067. (in Chinese)
- [23] 袁鲲, 梁红漫. 基于混合定价模型的中国信用债券利差研究 [J]. *上海金融*, 2013 (8): 92 - 95.
Yuan Kun, Liang Hongman. The research of China's credit-risky bond spread based on hybrid pricing model [J]. *Shanghai Finance*, 2013 (8): 92 - 95. (in Chinese)
- [24] 刘善存, 牛伟宁, 周荣喜. 基于 SV 模型的我国债券信用价差动态过程研究 [J]. *管理科学学报*, 2014, 17 (3): 37 - 48.
Liu Shancun, Niu Weining, Zhou Rongxi. Research on the dynamic process of credit spreads of China's bonds based on SV model [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2014, 17 (3): 37 - 48. (in Chinese)
- [25] Ball C A, Torous W N. The stochastic volatility of short-term interest rates: Some international evidence [J]. *The Journal of Finance*, 1999, 54 (6): 2339 - 2359.
- [26] Creal D D, Wu J C. Estimation of affine term structure models with spanned or unspanned stochastic volatility [J]. *Journal of Econometrics*, 2015, 185 (1): 60 - 81.
- [27] Duffee G R. The relation between treasury yields and corporate bond yield spreads [J]. *The Journal of Finance*, 1998, 53 (6): 2225 - 2241.
- [28] Chen R R, Cheng X, Wu L. Dynamic interactions between interest-rate and credit risk: Theory and evidence on the credit default swap term structure [J]. *Review of Finance*, 2013, 17 (1): 403 - 441.
- [29] Collin-Dufresne P, Goldstein R S, Martin J S. The determinants of credit spread changes [J]. *The Journal of Finance*, 2001, 56 (6): 2177 - 2207.
- [30] Duffie D, Singleton K J. *Credit risk: Pricing, measurement, and management* [M]. New Jersey: Princeton University Press, 2003: 156 - 161.
- [31] 姜金香. 信用债利差的分解及影响因素 [R]. 上海: 海通证券股份有限公司, 2010: 6 - 12.
Jiang Jinxiang. Decomposition and impact factors of defaultable bond credit spread [R]. Shanghai: Haitong Securities Co., Ltd., 2010: 6 - 12. (in Chinese)

Empirical Research on Volatility Structure of Defaultable Bond Market under HJM Framework with Stochastic Volatility

Su Yunpeng, Yang Baochen

College of Management and Economics, Tianjin University, Tianjin 300072, China

Abstract: Volatility structure is of significance in pricing and hedging of defaultable bonds and its derivatives. Using AAA corporate bond price data, the term structure of defaultable bonds in China is first of all calculated by the extended Nelson-Siegel model based on genetic algorithm, and then analyzed by econometric methods, such as principal component analysis, Jarque-Bera test and ARCH LM test. It shows that the term structure of defaultable bonds is mainly driven by three volatility factors with a significant ARCH characteristic from the perspective of dynamics. In the light of above analysis above, a defaultable HJM model with stochastic volatility is established by decomposing the defaultable short rate into the default-free short rate and the short-term credit spread, and setting their volatilities dependent at both state variable's level and in the stochastic volatility process. A finite dimensional affine realisation is obtained for the established model under appropriate volatility specifications. Then, a comparison is carried out between the established model and the HJM model with level-dependent volatility, demonstrating that the established model offers a much better performance in both data fitting and distribution depicting.

Based on the established model, a systematic analysis is made on the volatility structure of the defaultable bond market in China in the three aspects of the stochastic volatility feature, correlation structure and contribution of the volatility factors. The result shows that the volatilities of both default-free interest rate and credit spread implied in the defaultable bond price have significant stochastic volatility, indicating a trend of continuous increase in the sample period with a considerable influence on the bond pricing precision and error distribution. There exist significant correlations among the three main volatility factors of the default-free short rate, the short-term credit spread and the stochastic volatility. It is noteworthy that the default-free short rate is positively correlated with the short-term credit spread just opposite to what it is in USA market. Moreover, the risk contribution of each volatility factor fluctuates significantly accordingly. The default-free short rate contributes more to the total risk during the boom period, while the short-term credit spread contributes more during the recession period.

Based on the analyses, this paper suggests that the stochastic volatility feature and the interaction between the interest rate risk and credit risk should be introduced into the term structure model of defaultable bonds with appropriate specifications on the basis of the reality of the defaultable bond market in China. It also suggests that the focal point of the risk management for defaultable bonds and its derivatives should be adjusted with the business cycle accordingly.

Keywords: stochastic volatility; Heath-Jarrow-Morton framework; defaultable forward rate; credit spread; volatility structure

Received Date: May 14th, 2014 **Accepted Date:** December 11th, 2014

Funded Project: Supported by the National Natural Science Foundation of China(71171144), the Humanity and Social Science Youth Foundation of Ministry of Education of China(11YJCZH147), the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education(20130032120013) and the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University(IRT1028)

Biography: Su Yunpeng(1982 - , Native of Xingtai, Hebei), Doctor of Management Science and is a Lecturer in College of Management and Economics at Tianjin University. His research interests include financial engineering and management, econometric methods and applications, etc.

E-mail: ypsu@tju.edu.cn

□