



# 基于蒙特卡洛 RMT 去噪法 小股票组合风险优化研究

李冰娜<sup>1</sup>, 惠晓峰<sup>2</sup>, 李连江<sup>3</sup>

1 东北大学秦皇岛分校 经济学院, 河北 秦皇岛 066004

2 哈尔滨工业大学 管理学院, 哈尔滨 150001

3 东北大学秦皇岛分校 控制工程学院, 河北 秦皇岛 066004

**摘要:**在 Markowitz 证券投资组合理论的框架下, 证券收益协方差矩阵往往受到“维数灾祸”的影响而充斥噪声, 这给 Markowitz 证券投资组合的构建及其风险的优化带来了严重的困扰。在对证券收益协方差矩阵去噪进而实现证券投资组合风险优化方面, 基于随机矩阵理论 (RMT) 的去噪方法是一种非常具有优势的有效方法。

从说明 Markowitz 股票投资组合风险的含义入手, 以投资组合风险预测的准确率衡量投资组合风险的优劣, 继而对于股票收益协方差矩阵的原有 RMT 去噪法的原理进行阐释。在此基础上分析认为小股票组合条件下原有 RMT 去噪法因噪声特征值边界界定误差而产生组合风险优化作用下降的问题, 为解决该问题, 采用蒙特卡洛模拟法确定收益协方差矩阵的最大噪声特征值, 从而建立蒙特卡洛 RMT 去噪法。对 LCPB 去噪法、PG+去噪法和 KR 去噪法等原有 RMT 去噪法和蒙特卡洛 RMT 去噪法的组合风险优化作用开展实证研究。

研究表明, 各种 RMT 方法对相等加权协方差矩阵去噪前后的组合风险结果与指数加权协方差矩阵的组合风险结果非常类似; 收益协方差矩阵未去噪时, 随着股票数量减小, 组合风险的优化水平越来越高, 这主要是因为收益协方差矩阵噪声不断减小; 当对收益协方差矩阵去噪时, 随着股票数量的减小, 原有 RMT 去噪法比蒙特卡洛 RMT 去噪法具有的去噪优势因原有方法对噪声特征值边界界定误差的增大而呈减小趋势, 因此, 组合中股票降至较低数量时, 原有 RMT 去噪法的组合风险优化作用开始变得低于蒙特卡洛 RMT 去噪法, 这说明蒙特卡洛 RMT 去噪法是一种解决小股票组合风险优化条件下原有 RMT 去噪法效力下降问题的有效方法。

新的蒙特卡洛 RMT 去噪法提供了证券投资组合权重分配的具体方法, 提高了组合风险预测的准确率, 对设计合理的证券投资策略和优化证券投资风险具有参考意义。

**关键词:** Markowitz 投资组合; 组合风险优化; 小组合; RMT 去噪法; 蒙特卡洛模拟

**中图分类号:** F830.91      **文献标识码:** A      **doi:** 10.3969/j.issn.1672-0334.2016.02.011

**文章编号:** 1672-0334(2016)02-0134-12

**收稿日期:** 2015-06-24      **修返日期:** 2016-03-04

**基金项目:** 国家自然科学基金(71401028); 中央高校基本科研业务费专项资金(N130323008); 东北大学秦皇岛分校校内基金(XNB201418)

**作者简介:** 李冰娜, 管理学博士, 东北大学秦皇岛分校经济学院讲师, 研究方向为金融投资组合和风险管理等, 代表性学术成果为“基于最小扰动相关去噪法股票投资组合风险优化”, 发表在 2013 年第 10 期《系统工程理论与实践》, E-mail: libingna519@163.com

惠晓峰, 管理学博士, 哈尔滨工业大学管理学院教授, 研究方向为汇率预测、金融安全和金融市场效率等, 曾主持国家自然科学基金项目“上市公司信息披露与资本成本研究”(70573030), E-mail: xfhui@hit.edu.cn

李连江, 工学博士, 东北大学秦皇岛分校控制工程学院讲师, 研究方向为多学科联合仿真等, 代表性学术成果为“Research on improvement of lidar imaging quality based on fusion technology”, 发表在 2012 年第 1-2 期《Lasers in Engineering》, E-mail: lilianjiangpro@163.com

## 1 引言

Markowitz 投资组合理论表明对证券投资组合进行决策往往需要利用证券收益多元波动率(协方差矩阵)<sup>[1]</sup>。该矩阵一般只能由证券收益率的市场观测值来估计,但是实际观测值序列长度的有限(即所谓的“维数灾祸”)会使估计出的矩阵存在噪声,尤其是当证券数量较大时,估计噪声甚至会起主导作用<sup>[2]</sup>。不难想象,在此基础上测算的证券投资组合难免会对人们的投资决策造成误导,并且导致组合未来风险的预测也是不准确的。因此,对证券收益协方差矩阵(下文简称为协方差矩阵)去噪是实现证券投资组合风险优化的前提<sup>[3]</sup>。

近年来,源自于经济物理学的随机矩阵理论(random matrix theory, RMT)<sup>[4]</sup>的去噪法凭借其独特的优势在证券协方差矩阵去噪,进而实现证券投资组合风险优化方面发挥了巨大的作用<sup>[5]</sup>。然而,相对于几百只乃至上千只证券的组合而言,RMT去噪法对较小数量证券的组合,特别是百只以下证券组合的协方差矩阵去噪的作用很小,因此,对这些规模较小的组合风险优化效果很差。如何改进 RMT 去噪法对小股票组合协方差矩阵的去噪效力,以促进小股票组合风险的优化是值得密切关注的问题。在美国,大多数基金的投资组合囊括了超过 100 种证券,但个人投资者的投资组合规模一般都不大。与美国相比,中国证券投资组合的规模更小,主要原因是中国资本市场以中小投资者为主,机构投资者所占比例较低,且投资规模较小<sup>[6]</sup>。可见,现实经济生活中小规模投资组合的使用是非常多的。因此,研究解决小组条件下 RMT 去噪法的误差问题,以期实现小股票组合风险的优化,对指导证券市场投资风险管理 and 满足日益增长的投资理财需求有重要的现实意义。

## 2 相关研究评述

学者们基于 RMT 对金融收益多元波动率<sup>[7]</sup>的噪声进行了大量研究,发现金融协方差矩阵的绝大部分特征值处于 RMT 预测的噪声带内,它们代表协方差矩阵中的噪声,而仅有个别特征值大于最大随机特征值,它们包含资产间相关的信息<sup>[8-9]</sup>。针对金融收益多元波动率中的噪声,LCPB 去噪法、PG + 去噪法和 KR 去噪法等传统 RMT 去噪法被相继提出,并在证券投资组合风险优化方面进行了大量的应用。也有个别学者对这几种方法进行了适当的变换,不过这方面的探索较少。

最先产生的 RMT 去噪法是 LCPB 去噪法,它是由 LALOUX et al.<sup>[10]</sup>建立的,对该方法的实证结果表明去噪使组合风险预测误差大大降低;LEE<sup>[11]</sup>利用随机相关矩阵谱的中心极限定理识别出 S&P 500 的 233 只代表性股票在 1997 年 1 月 2 日至 2001 年 5 月 11 日的日收益相关矩阵的噪声带后,用 LCPB 去噪法对该矩阵进行了去噪。RMT 去噪法在证券组合选择方面的作用明显优于其他方法。PAFKA et al.<sup>[12]</sup>使用模拟方法

对比了样本相关矩阵、基于单一指数法的相关矩阵和基于 RMT 的相关矩阵用于证券组合选择的性能,结果显示,在减弱噪声影响方面,RMT 去噪法的确是一种十分有效的降维方法;TOLA et al.<sup>[13]</sup>将聚类算法和 RMT 去噪法用于证券组合优化,并从可靠性、风险和有效资产数量 3 个方面对二者的效果进行比较,他们的结论是在理想化的条件下,即对未来收益和波动率有完全的预测能力和允许卖空时,聚类法的可靠性优于 RMT 方法,单一连接聚类法的风险水平高于平均连接聚类法和 RMT 去噪法,而它的有效资产数量明显低于后两种方法。

除 LCPB 去噪法外,PLEROU et al.<sup>[14]</sup>也提出了一种基于 RMT 的去噪法,即 PG + 去噪法。PG + 法与 LCPB 法的原理非常相似,它们都对噪声特征值的替代进行简单、粗糙的处理。为实现 RMT 去噪法算法的改进,SHARIFI et al.<sup>[15]</sup>提出了基于 RMT 和协方差矩阵特征向量 Krzanowski 稳定性的 KR 去噪法。虽然 KR 去噪法具有非常明显的理论优势,但它在实际应用中的组合风险优化效果尚需进一步验证。对此,DALY et al.<sup>[16]</sup>使用 LCPB 去噪法、PG + 去噪法和 KR 去噪法对资产数量为 100、250 和 432 的组合协方差进行去噪,发现 KR 法能最大程度地降低平均已实现风险。通过观测已实现风险评价组合风险优化效果的研究还有很多,如 KAROU<sup>[17]</sup>应用 RMT 方法研究 Markowitz 组合的已实现风险;RUBIO et al.<sup>[18]</sup>基于 RMT 研究高维样本下最小方差组合的已实现方差;WAKAI et al.<sup>[19]</sup>分析随机矩阵方法构建的均值-方差模型的最优组合的典型特点。除美国等发达国家证券市场外,一些学者基于 RMT 开展了发展中经济体证券市场特征谱的类似研究。TANG et al.<sup>[20]</sup>发现上海证券市场 523 只 A 股股票和深圳证券市场 445 只 A 股股票的收益相关矩阵存在大量噪声,基于 RMT 对它们去噪,结果表明去噪后构建的投资组合优于原始样本相关矩阵和 Kendall  $\tau$  相关矩阵建立的投资组合;OH et al.<sup>[21]</sup>基于 RMT 研究韩国证券市场上证券相关矩阵的统计特性及其对 Markowitz 组合权重的影响,发现由去噪前后相关矩阵计算得到的组合风险的熵函数是一个幂函数;韩华等<sup>[22]</sup>以上海证券市场数据为样本,基于 RMT 探讨金融相关矩阵特征值的统计特性,并对金融相关矩阵进行去噪,以使其更适合于构建金融网络。随着 RMT 在金融领域应用的不断深入,一些研究并非仅单独利用 RMT 方法,而是注重 RMT 方法与其他理论和方法的有机整合。ARAI et al.<sup>[23]</sup>将主成分分析与 RMT 结合起来,以东京股票交易所日收益数据为样本,运用所建立的复杂 PCA 方法分析股票收益相关矩阵,结果表明收益相关矩阵最大特征值表示一种对所有股票价格都会产生影响的市場力量,可以根据其他较大特征值对应的特征向量对股票进行分类;YANG et al.<sup>[24]</sup>应用 RMT 去噪法滤除证券相关矩阵中的噪声和共变趋势,继而用加权多目标遗传算法对证券进行分群;WANG et al.<sup>[25]</sup>基于 RMT 研究发现全球证券指数间相关可以由一个全球

因素模型作出解释,他们进一步说明了该模型在降低全球范围内投资组合风险方面的价值;WANG et al.<sup>[26]</sup>使用皮尔森相关系数法和去趋势相关系数法构建 S&P 500 指数的 462 只成分股票间的相关矩阵,并采用 RMT 法分析它们的统计特性,结果表明去趋势相关矩阵的一些特点对最佳组合选择和风险管理很有帮助。

除将 RMT 用于资产数量较大的组合外,也有学者将其用于小证券组合的研究。CONLON et al.<sup>[27]</sup>采用 LCPB 去噪法对 49 个对冲基金 105 个月的月收益协方差矩阵进行去噪,并将去噪后的协方差矩阵用于构建组合基金,结果表明 RMT 去噪法对组合基金风险的改进作用较小;KUMAR et al.<sup>[28]</sup>利用 RMT 方法研究 20 个金融指数的相关和网络特性,发现第二大特征值对应特征向量的成分能够将各指数在正负方向上分为两类,这两类指数的成分值在金融危机期间会向相反方向转换。这些研究表明 RMT 去噪法用于小证券组合风险优化的效果非常不显著。事实上,也有一些研究认为,当将 RMT 去噪法应用于小证券组合时,甚至无法产生任何风险优化的作用。PAFKA et al.<sup>[29]</sup>采用 RMT 方法对指数加权协方差矩阵去噪,结果表明当组合中资产数量较小时,样本协方差矩阵的组合风险稍低于采用 RMT 法去噪的协方差矩阵;DALY et al.<sup>[30]</sup>还将 LCPB 法、PG + 法和 KR 法用于 39 种外汇资产协方差矩阵的去噪,结果表明去噪效果随资产数量减少而下降;SANDOVAL et al.<sup>[31]</sup>发现用 RMT 方法去噪并不能产生更好的组合风险预测结果,而将 RMT 去噪法与消除市场效应的回归模型法结合起来却在 62.5% 的情况下能带来更好的风险预测结果。

与国外研究相比,中国学者基于 RMT 探讨金融市场中投资组合优化和风险管理问题的研究很少。罗英等<sup>[32]</sup>应用随机矩阵理论及方法解析中国股票组合协方差矩阵的信息结构,发现它存在受市场因素和行业因素主导的信息结构。韩华等<sup>[22]</sup>、唐晓清等<sup>[33]</sup>和惠晓峰等<sup>[34]</sup>在讨论股票协方差矩阵相关结构的基础上,进一步开展协方差矩阵去噪和投资组合构建的研究工作。韩华等<sup>[22]</sup>基于 RMT 对金融相关系数矩阵去噪,并构建了金融网络模型;唐晓清等<sup>[33]</sup>基于 RMT 改进了 Markowitz 组合投资模型,结果表明 RMT 可以侦测到“异常”数据,从而改进对模型参数的估计;惠晓峰等<sup>[34]</sup>在 Markowitz 投资组合理论框架下研究 RMT 去噪法用于多元 GARCH 模型的有效性,结果表明 RMT 能够为多元 GARCH 的降维提供有效的依据,并且较准确地确定多元 GARCH 模型的最佳维度。

从上述研究看,原有 RMT 去噪法主要包括 LCPB 法、PG + 法和 KR 法。从这些方法应用的对象看,它们不仅用于对上百只甚至几百只资产的大组合进行去噪,也用于百只以下资产的小组合;但与大组合的去噪效果相比,它们对小组合的去噪作用并不明显,有时甚至带来负的组合风险优化效果。已有研究基

于小组合情形下协方差矩阵噪声较低的规律,将 RMT 去噪法对小组合作用的不明显化或“失灵”视为一种十分正常的现象,即这种现象的发生并不是由 RMT 去噪法自身的原因导致的。然而,对 RMT 去噪法的原理进行细致的分析发现,在小组合条件下原有 RMT 去噪法的算法都有比较严重的缺陷,即最大噪声特征值的解析解存在较大的计算误差,这难免会对组合风险优化带来负面影响。目前,从 RMT 去噪法自身存在问题的视角探讨它们对小证券组合风险优化作用降低的相关研究还比较少见。本研究正是从该角度展开研究,阐明 Markowitz 投资组合风险及其优化的有关基本概念,指出小组合风险优化时原有 RMT 去噪法的缺陷,即最大噪声特征值准确性下降的问题,并分析该问题产生的原因,提出蒙特卡洛 RMT 去噪法,最后进行以验证蒙特卡洛 RMT 去噪法效力为目的的实证研究工作。

### 3 Markowitz 投资组合风险及其优化

Markowitz 均值 - 方差模型的主要目的是通过对未来期的期望收益率和协方差矩阵的预测来对未来期的有效投资组合进行预测。在实际应用中,人们通常利用样本协方差矩阵对未来期的真实协方差矩阵进行预测。在此基础上根据 Markowitz 均值 - 方差模型构建的投资组合在本研究中称为 Markowitz 投资组合。为了表述方便,本研究将用于预测的历史数据所在的时期称为预测期,将发生投资的未来期称为投资期,Markowitz 投资组合在投资期实现的风险称为 Markowitz 投资组合风险。

对 Markowitz 投资组合风险预测的准确性越高,则基于该预测做出的投资决策就越正确,投资组合给决策者带来的利益也就越大。因此,本研究用 Markowitz 投资组合风险预测的准确率表示 Markowitz 投资组合风险的优化水平。当对 Markowitz 投资组合风险的预测准确率提高时,则意味着 Markowitz 投资组合风险实现了优化。

## 4 小组合条件下原有 RMT 去噪法的缺陷

### 4.1 原有 RMT 去噪法的原理

到目前为止,还没有专门针对小组合而设计的 RMT 去噪法。与大组合相同,能够用于小组合协方差的 RMT 去噪法主要有 LCPB 法、PG + 法和 KR 法 3 种,这 3 种方法对金融协方差矩阵的去噪原理类似,都是依据矩阵的特征分解去噪。

股票样本协方差矩阵的计算方法主要包括相等加权法和指数加权法。假定  $N$  个时间序列长度为  $T$ 、样本方差为  $\sigma^2$  的股票收益序列  $r_{1,t}, r_{2,t}, \dots, r_{N,t}$  的相等加权样本协方差矩阵为  $S_{eq}$ , 指数加权样本协方差矩阵为  $S_{ex}$ 。以  $S_{eq}$  和  $S_{ex}$  的特征值作为主对角线元素的对角矩阵分别记为  $D_{eq}$  和  $D_{ex}$ , 以各特征值对应的特征向量作为相应的列形成的矩阵分别为  $E_{eq}$  和  $E_{ex}$ , 则

$$S_{eq} = E_{eq} D_{eq} E_{eq}^{-1} \quad (1)$$

$$S_{ex} = E_{ex} D_{ex} E_{ex}^{-1} \quad (2)$$

$S_{eq}$ 和 $S_{ex}$ 的噪声能够在它们的特征值中反映出来。 $S_{eq}$ 和 $S_{ex}$ 的一部分特征值能够反映真实的相关信息,但由于用于计算它们的时间序列长度往往是有限(非无穷)的,因此, $S_{eq}$ 和 $S_{ex}$ 会受到随机因素的干扰而产生一些无法反映真实相关信息的噪声特征值。由于它们的噪声特征值具有随机性特征,因此,可以依据相应随机矩阵的特征值分布来确定这些噪声特征值的范围。

首先说明 $S_{eq}$ 的噪声特征值的识别。 $S_{eq}$ 对应的随机协方差矩阵为 $R$ ,即

$$R = \frac{1}{T} A A^T \quad (3)$$

其中, $A$ 为一个 $N \cdot T$ 矩阵,其中元素是均值为0、方差为 $\sigma^2$ 的独立、相同分布的随机变量。由于用于计算 $R$ 的随机序列的个数、长度和方差与用于计算 $S_{eq}$ 的时间序列相同,因此,可以依据 $R$ 的特征值分布区间确定 $S_{eq}$ 的噪声特征值的范围。

$S_{ex}$ 的噪声特征值的识别与 $S_{eq}$ 类似。要识别出 $S_{ex}$ 的噪声特征值,必须先建立随机因素间的指数加权随机协方差矩阵,并计算该随机协方差矩阵的特征值。 $S_{ex}$ 对应的指数加权随机协方差矩阵为 $M$ , $M = \{m_{ij}\}_{i=1}^N, j=1, \dots, N$ , $i, j$ 为组合中股票的序号。 $M$ 的元素为

$$m_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\gamma) \gamma^k x_{i,k} x_{j,k} \quad (4)$$

其中, $\gamma$ 为衰减因子, $k$ 为其指数, $x_{i,k}, x_{j,k}$ 为均值为0、方差为 $\sigma^2$ 的正态分布的随机变量, $i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, N, k=0, 1, \dots, \infty$ 。用于计算 $M$ 的随机序列的个数和方差与计算 $S_{ex}$ 的股票收益序列的个数和方差对应相等,因此,可以依据 $M$ 的特征值分布区间确定 $S_{ex}$ 的噪声特征值的范围。

接下来,用 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 表示 $R$ 和 $M$ 的特征值区间,则 $S_{eq}$ 和 $S_{ex}$ 的特征值中属于 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 的部分应被识别为噪声特征值。然而,由于小于 $\lambda_-$ 的特征值对应的特征向量并不稳定,因此,在应用RMT去噪法时,通常将不大于 $\lambda_+$ 的特征值都当做噪声特征值而对其进行替换。在替换噪声特征值时,LCPB法、PG+法和KR法的做法各不相同。由于 $\lambda_+$ 界定了噪声特征值的上限,因此,这里将 $\lambda_+$ 称为最大噪声特征值。由于大于 $\lambda_+$ 的特征值并不是由噪声产生的,因此让它们保持不变。设对 $D_{eq}$ 和 $D_{ex}$ 中的元素进行部分保持和部分替换后形成的矩阵分别为 $D_{eq-filtered}$ 和 $D_{ex-filtered}$ ,则对 $S_{eq}$ 和 $S_{ex}$ 去噪后的结果分别为

$$S_{eq-filtered} = E_{eq} D_{eq-filtered} E_{eq}^{-1} \quad (5)$$

$$S_{ex-filtered} = E_{ex} D_{ex-filtered} E_{ex}^{-1} \quad (6)$$

#### 4.2 最大噪声特征值的计算误差

①原有RMT去噪法对相等加权协方差矩阵最大噪声特征值的计算方法和结果。研究表明,在

$N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$ 且 $Q = \frac{T}{N}$ 不变情况下,由(3)式得到的 $R$ 的特征值概率密度函数为

$$p(\lambda) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda}, & \lambda_- \leq \lambda \leq \lambda_+ \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

其中, $Q$ 为股票时间序列长度与股票数量之比。

在 $N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$ 且 $Q = \frac{T}{N}$ 不变时,可以算得(7)式中的最大噪声特征值 $\lambda_+$ 为

$$\lambda_+ = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{Q} + 2\sqrt{\frac{1}{Q}}\right) \quad (8)$$

(2)原有RMT去噪法对指数加权协方差矩阵最大噪声特征值的计算方法和结果。在 $N \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow 1$ 且 $Q = \frac{1}{N(1-\gamma)}$ 不变时,由(4)式得到的 $M$ 的特征值概率密度函数为

$$\rho(\lambda) = \frac{Qv}{\pi} \quad (9)$$

其中, $v$ 为函数 $F(v)$ 取值为0时的解。

$$F(v) = \frac{\lambda}{\sigma^2} - \frac{v\lambda}{\tan(v\lambda)} + \ln(v\sigma^2) - \ln[\sin(v\lambda)] - \frac{1}{Q} \quad (10)$$

在 $N \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow 1$ 且 $Q = \frac{1}{N(1-\gamma)}$ 不变时,下述方程的解即为 $M$ 的最大特征值 $\lambda_+$ ,即

$$\frac{\lambda}{\sigma^2} - \ln\left(\frac{\lambda}{\sigma^2}\right) = 1 + \frac{1}{Q}, \lambda > \sigma^2 \quad (11)$$

根据 $\lambda_+$ 的上述计算方法,原有RMT去噪法并没有真正计算 $\lambda_+$ ,而是用随机协方差矩阵在极限条件下的最大特征值近似地表示 $\lambda_+$ 。由于实际应用中 $N$ 都是有限的,因此,原有RMT去噪法在 $N \rightarrow \infty$ 时计算的 $\lambda_+$ 必然会偏离于真正的 $\lambda_+$ 。不难想象,两者的偏差会随 $N$ 的减小而增大。当 $N$ 较小时,对 $\lambda_+$ 的计算准确性也会因此降至较低水平。这种在小组条件下对 $\lambda_+$ 的较大计算误差会造成噪声特征值的错误识别,并进一步对噪声特征值的替换造成不利的影 响,导致发生替换过度或替换不足。无论是替换过度还是替换不足,都会令 $D_{eq-filtered}$ 和 $D_{ex-filtered}$ 无法被正确地确定,从而造成RMT方法去噪效力的下降,并进一步地对股票投资组合风险的优化带来不利的影 响。尽管过去多年中RMT去噪法的应用较多,不过它们的上述误差问题却一直没有引起学者们的关注。

## 5 蒙特卡洛 RMT 去噪法的设计和实现

### 5.1 设计思想

为了消除小组条件下RMT去噪法中 $\lambda_+$ 准确性下降的问题对投资组合风险优化的不利影 响,本研

究用蒙特卡洛模拟法确定 $\lambda_+$ ,从而设计了蒙特卡洛RMT去噪法,简称为MKR去噪法。除了 $\lambda_+$ 的确定方法外,蒙特卡洛RMT去噪法与原有RMT去噪法的原理相同。蒙特卡洛模拟方法的原理是:根据随机过程,用计算机模拟的方法生成时间序列,并将其作为抽样结果,以此计算参数估计值。蒙特卡洛模拟方法对参数的估计精度随模拟次数增多而逐渐提高,这保证了蒙特卡洛模拟法一般都能取得较高的估计精度。由 $\lambda_+$ 的原始计算模型可知, $\lambda_+$ 的计算问题具有明显的概率特征,因此,蒙特卡洛模拟法非常适合于计算 $\lambda_+$ 。蒙特卡洛模拟法对相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵 $\lambda_+$ 的计算方法相同,因此,本研究以相等加权协方差矩阵为例介绍用蒙特卡洛模拟法确定 $\lambda_+$ 的原理。

## 5.2 蒙特卡洛模型构建

设方差分别为 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2$ ,长度都为 $T$ 的 $N$ 个股票收益样本序列的协方差矩阵为 $S$ ,则由前面的分析可知, $S$ 对应的随机协方差矩阵 $R$ 为

$$R = \frac{1}{T} AA^T \quad (12)$$

其中,

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1T} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{NT} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$A$ 中元素 $x_{i,l}$ 为均值为0、方差为 $\sigma_i^2$ 的独立、正态分布的随机变量, $i=1,2,\dots,N,l=1,2,\dots,T$ 。下面应用蒙特卡洛模拟法建立 $R$ 的统计模拟模型并计算其最大特征值 $\lambda_+$ ,由于 $R$ 可以用 $A$ 表示,因此主要针对 $A$ 构造概率模型或随机模型。蒙特卡洛模拟所依据的矩阵 $A$ 可以表示为

$$A = \begin{cases} x_{1,l} \sim N(0, \sigma_1^2) \\ \vdots \\ x_{N,l} \sim N(0, \sigma_N^2) \end{cases} \quad (14)$$

其中, $N(0, \sigma_i^2)$ 为均值为0、方差为 $\sigma_i^2$ 的正态分布。本研究将蒙特卡洛模拟误差的阈值设定为 $\varepsilon_0$ 。设蒙特卡洛模拟估计值为 $\lambda_{\max}$ ,其误差为 $\varepsilon$ ,本研究目标是获得 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ 的 $\lambda_{\max}$ 。研究表明,蒙特卡洛模拟误差随模拟次数增加而下降。根据该特点,本研究设计思路为:先得到模拟次数为100时的 $\lambda_{\max}$ 和其误差 $\varepsilon$ ,如果 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,则该 $\lambda_{\max}$ 就是对 $\lambda_+$ 的最终估计值。否则,进行新的模拟,并计算模拟次数增加后的 $\lambda_{\max}$ 和其误差 $\varepsilon$ ,若 $\varepsilon$ 仍大于 $\varepsilon_0$ ,则继续增加模拟次数,直至获得 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ 的 $\lambda_{\max}$ 。蒙特卡洛模拟的流程见图1,具体步骤如下。

第1步 根据矩阵 $A$ 概率模型中各行随机变量的分布,在计算机上产生随机数。每行产生符合概率模型的 $T$ 个随机数,共产生 $N$ 行,构成矩阵 $A$ 的一次样本抽样。

由于矩阵 $A$ 概率模型中各行随机变量都服从正

态分布,因此,这里需要产生的是正态分布随机数。本研究基于计算机实现这一过程,而计算机只能提供均匀分布的伪随机序列,因此应从均匀分布的伪随机序列出发,建立正态分布的随机序列。该正态分布序列可以借助累积分布函数(CDF函数)得到,CDF函数的反函数可以用来生成服从该随机分布的随机变量。设 $F_X$ 为概率分布 $X$ 的累积分布函数,并存在反函数 $F_X^{-1}$ 。若 $a$ 为 $[0,1)$ 区间上均匀分布的随机变量,则 $F_X^{-1}(a)$ 服从 $X$ 分布。根据这一特性,本研究将采用CDF函数法在计算机上构造正态分布随机序列。由正态分布概率密度函数可以推导出正态分布CDF函数,其曲线见图2, $x$ 轴为正态分布随机数, $y$ 轴为均匀分布随机数。在图2中,当 $a$ 取 $[0,1)$ 上均匀分布的随机数时,它对应的 $x$ 即为所需要的正态分布随机数。

第2步 应用 $A$ 的一次样本抽样计算出矩阵 $R$ 和它的全部特征值。设 $E$ 为单位矩阵,那么 $|mE - R| = 0$ 中 $m$ 的全部根就是 $R$ 的全部特征值。设 $R$ 的全部特征值为 $R_\lambda, R_\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ ,遍历所有特征值找到最大值 $\lambda_{\max 1}$ 。

第3步 计算模拟100次时的蒙特卡洛估计值 $\lambda_{\max}$ 。重复进行蒙特卡洛模拟100次,可以获得集合 $\lambda'_{\max} = \{\lambda_{\max 1}, \lambda_{\max 2}, \dots, \lambda_{\max 100}\}$ 。遍历集合 $\lambda'_{\max}$ ,从中找到最大值,该最大值就是模拟次数为100时的蒙特卡洛估计值 $\lambda_{\max}$ 。

第4步  $\lambda_{\max}$ 的误差的计算公式为

$$\varepsilon = \lambda_\alpha \sigma \quad (15)$$

其中, $\sigma$ 为蒙特卡洛估计值的标准差,它是未知的,这里用序列 $\{\lambda_{\max i}\}_{i=1}^{100}$ 的标准差近似代替 $\sigma$ ; $\alpha$ 为显著性水平,令其值为0.05; $\lambda_\alpha$ 为置信水平为 $(1-\alpha)$ 的正态分布的临界值,它可通过查正态分布表获得。

第5步 取得 $\lambda_+$ 的最终估计值。如果 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,则第3步得到的 $\lambda_{\max}$ 就是对 $\lambda_+$ 的最终估计值。否则,进行第101模拟,并计算 $\lambda_{\max}$ 和其误差 $\varepsilon$ 。若 $\varepsilon$ 仍大于 $\varepsilon_0$ ,则继续进行第102次模拟。直至获得 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ 时的 $\lambda_{\max}$ ,该 $\lambda_{\max}$ 就是对 $\lambda_+$ 的最终估计值。

从上面计算过程能够看出,蒙特卡洛RMT去噪法是用随机模拟法近似计算 $\lambda_+$ 的。由于它是在股票数量 $N$ 取实际值的条件下计算 $\lambda_+$ ,因此能够有效解决对小组去噪时原有RMT去噪法因限定 $N \rightarrow \infty$ 的条件而引起对 $\lambda_+$ 计算准确性较低的问题,从而在组合资产数量较少时取得比原有RMT去噪法更好的去噪和组合风险优化效果。

## 6 基于蒙特卡洛RMT去噪法的小组合风险优化实证研究

### 6.1 研究方案设计

为验证蒙特卡洛RMT去噪法对原有RMT去噪法的改进作用仅适用于小组组合的特点,本实证分析考察大小组合在内的不同股票数量下对组合风险预测的准确率。这样,当股票数量不断减小时,就可以对

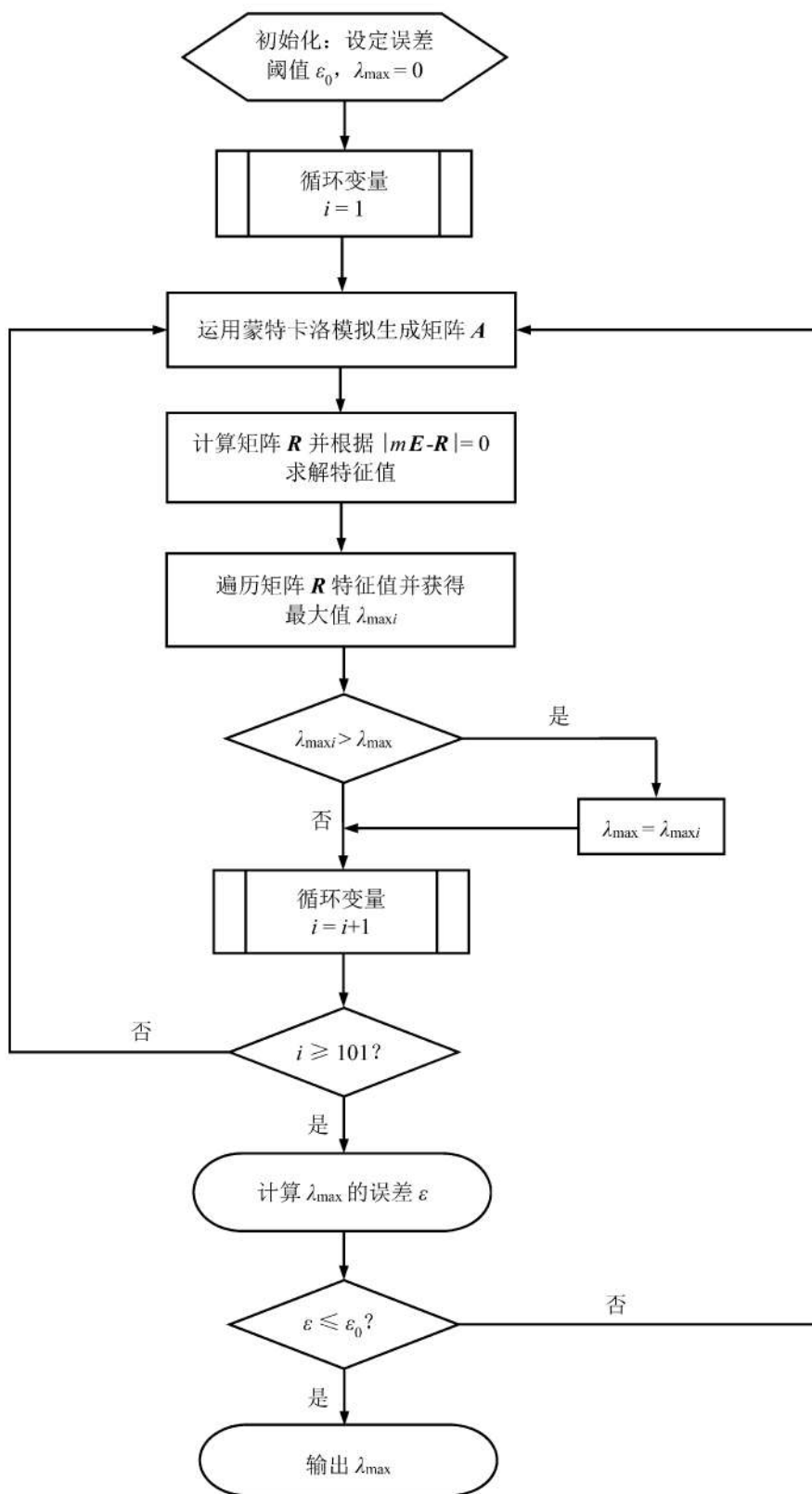


图 1 蒙特卡洛模拟流程

Figure 1 Monte Carlo Simulation Process

原有 RMT 去噪法和蒙特卡洛 RMT 去噪法的组合风险优化表现进行对比分析和趋势分析。具体地,组合内的股票数量  $N$  在  $[5,400]$  变化。协方差矩阵的计算采用日收益数据,所利用的原始股价数据来自 wind

数据库。将股价转换为收益率的方法为  $r_{i,t} = \ln p_{i,t} - \ln p_{i,t-1}$ ,  $p_{i,t}$  为第  $i$  只股票在第  $t$  天的收盘价,  $r_{i,t}$  为第  $i$  只股票在第  $t$  天的收益率,  $i = 1, 2, \dots, N, t = 1, 2, \dots, T$ 。

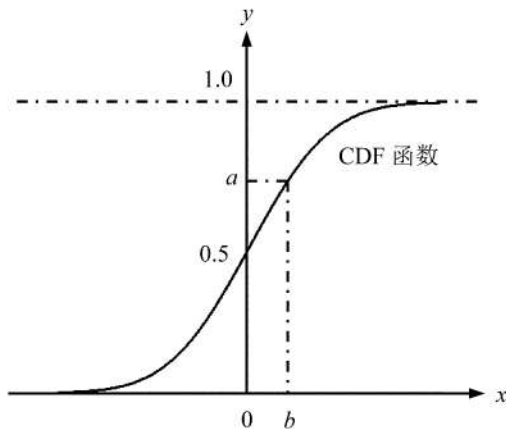


图2 正态分布的累积分布函数

Figure 2 Cumulative Distribution Function of Normal Distribution

由于本研究主要探讨  $N$  的变化对噪声特征值的计算精度进而对 RMT 去噪法组合优化表现的影响, 因此, 设定对应于不同  $N$  的时间序列长度  $T$  和衰减因子  $\gamma$  恒定不变。如果用来计算协方差矩阵的时间序列长度太大, 则 RMT 去噪法可能会因低噪声而失去去噪作用; 如果用来计算协方差矩阵的时间序列长度太小, 协方差矩阵的噪声就会很大, 各种 RMT 去噪法的去噪作用都会十分明显, 此时可能难以充分体现原有 RMT 去噪法和蒙特卡洛 RMT 去噪法的去噪差别。因此, 相等加权样本协方差矩阵的时间序列长度  $T$  和指数加权样本协方差矩阵的有效时间序列长度  $\frac{1}{\ln \gamma}$  都既不能太大, 也不能太小, 本研究将它们确定为 700 天。这样,  $\gamma$  值为 0.999。采用 bootstrap 方法获得原始样本协方差矩阵和用各种方法对其去噪后的组合风险预测准确率。对于股票数量不同的所有情况, bootstrap 算法的步骤是相同的, 具体如下。

步骤1 从 2011 年 1 月 4 日至 2014 年 12 月 31 日的所有日期中随机选择 1 个测试期。测试期后的 1 天为投资期, 测试期前 (包括测试期) 的 700 天为预测期。

步骤2 从备选股票中随机选择  $N$  只股票。备选股票是在上海证券交易所上市交易且在该预测期和投资期内存在交易数据的全部股票。

步骤3 用预测期股票协方差矩阵对投资期协方差矩阵进行预测。当采用相等加权法时, 预测期中第  $i$  只股票与第  $j$  只股票收益率的协方差为

$$s_{i,j} = \frac{1}{700} \sum_{t=1}^{700} (r_{i,t} - \langle r_{i,t} \rangle)(r_{j,t} - \langle r_{j,t} \rangle) \quad (16)$$

其中,  $r_{i,t}$  和  $r_{j,t}$  分别为第  $i$  只股票和第  $j$  只股票第  $t$  天的收益率,  $t = 1, 2, \dots, 700$ ;  $\langle \cdot \rangle$  为 700 天的均值。当采用指数加权法时, 预测期中第  $i$  只股票与第  $j$  只股票收益率的协方差为

$$s_{i,j}^* = \frac{1-\gamma}{1-\gamma^{700}} \sum_{p=0}^{699} \gamma^p (r_{i,700-p} - \langle r_{i,t} \rangle)(r_{j,700-p} - \langle r_{j,t} \rangle) \quad (17)$$

其中,  $\gamma = 0.999$ ,  $p$  为天数字号。将由 (16) 式计算的相等加权样本协方差矩阵和由 (17) 式计算的指数加权样本协方差矩阵及分别用 LCPB 法、PG+法、KR 法和 MKR 法对它们去噪后的矩阵作为投资期股票协方差矩阵的预测矩阵。将预测出的矩阵记为  $S$ ,  $S = \{\sigma_{i,j}^2\}_{i=1,j=1}^N$ , 则  $S$  的取值有 10 个。

步骤4 对于  $S$  的不同取值, 计算对最小方差组合风险的预测准确率。根据  $S$  计算的最小方差组合中第  $i$  只股票的投资权重  $w_i$  为<sup>[35]</sup>

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^N (\sigma_{i,j}^2)^{-1}}{\sum_{j=1,k=1}^N (\sigma_{j,k}^2)^{-1}} \quad (18)$$

对该组合风险的预测值  $R_{pr}^2$  为

$$R_{pr}^2 = \sum_{i=1,j=1}^N w_i \sigma_{i,j}^2 w_j \quad (19)$$

该组合在投资期中的真正风险并不可知, 因此用它的已实现风险近似代替其真正风险。设投资期已实现协方差矩阵为  $\hat{S} = \{\hat{\sigma}_{i,j}^2\}_{i=1,j=1}^N$ <sup>[36]</sup>, 则该组合的已实现风险为

$$R_{re}^2 = \sum_{i=1,j=1}^N w_i \hat{\sigma}_{i,j}^2 w_j \quad (20)$$

$R_{pr}^2$  和  $R_{re}^2$  的取值为正, 且它们越接近, 表明对最小方差组合风险预测的准确率越高。因此, 本研究构造表征  $R_{pr}^2$  和  $R_{re}^2$  偏离程度的指标  $PR$ , 衡量对组合风险预测的准确率大小, 即

$$PR = \frac{R_{pr}^2}{R_{re}^2} \quad (21)$$

容易看出  $PR$  的值越接近于 1, 表示最小方差组合风险优化水平越高。

步骤5 在  $N$  不变的条件下重复 20 次步骤 1~步骤 4, 然后分别计算 10 种协方差矩阵预测方法在 20 次试验中的平均  $PR$ 。

步骤6 重复步骤 1~步骤 5, 考察  $N$  不同时 10 种协方差矩阵预测方法的平均  $PR$ 。

通过上述 bootstrap 方法, 在  $T$  和  $\gamma$  不变的情况下得到相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵去噪前后的组合风险预测准确率随  $N$  的变化曲线, 见图 3 和图 4。

另外, 为了给组合风险预测准确率分析提供更多论据支持, 绘制  $N$  的不同取值下 MKR 去噪法基于蒙特卡洛模拟技术计算的  $\lambda_+$  的模拟解和原有 RMT 去噪法计算的  $\lambda_+$  的解析解的图形, 见图 5 和图 6。

## 6.2 实证结果和分析

由图 3 和图 4 可知, 相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵的实证结果十分类似。在分析协方差去噪对  $PR$  的具体影响前, 有必要先根据原始样本

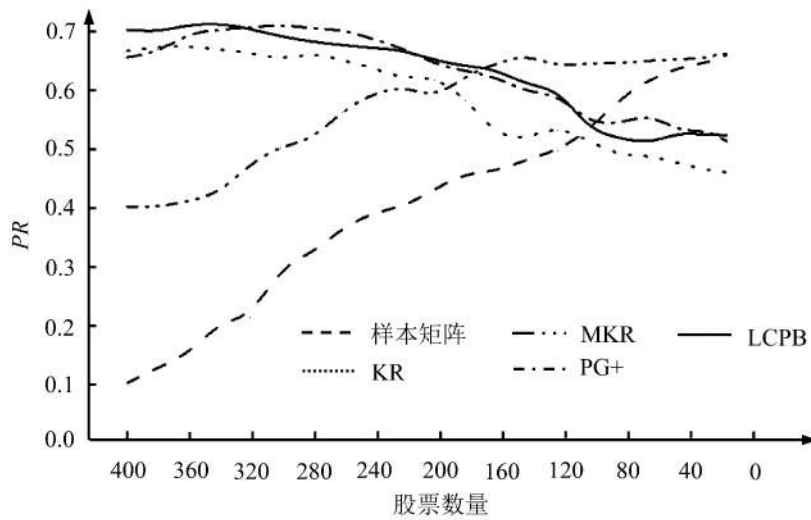


图3 相等加权协方差矩阵去噪前后的 PR

Figure 3 PR Pre- and Post- Filtering Equally Weighted Covariance Matrices

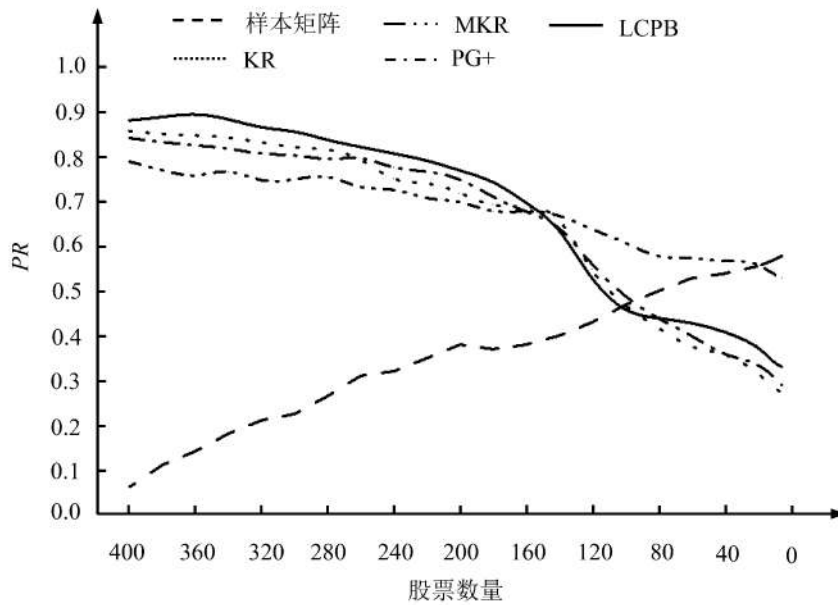


图4 指数加权协方差矩阵去噪前后的 PR

Figure 4 PR Pre- and Post- Filtering Exponentially Weighted Covariance Matrices

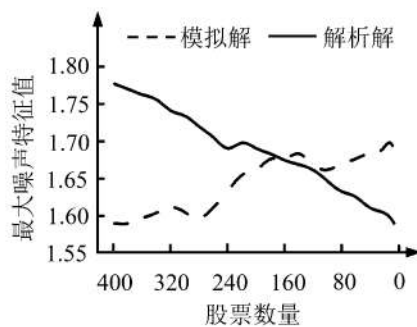


图5 相等加权协方差矩阵的最大噪声特征值  
Figure 5 The Maximum Noisy Eigenvalues of Equally Weighted Covariance Matrices

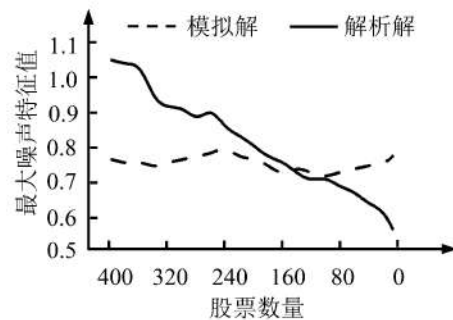


图6 指数加权协方差矩阵的最大噪声特征值  
Figure 6 The Maximum Noisy Eigenvalues of Exponentially Weighted Covariance Matrices



协方差矩阵(即去噪前的PR的变化趋势)对其受到的噪声影响进行分析。可以看出当协方差矩阵未去噪时,随着股票数量的减小,组合风险预测的准确率越来越高,这主要是因为它受到的噪声影响不断减小的缘故。在相等加权协方差矩阵中, $T$ 一定时,股票数量的减小弱化了“维数灾祸”的影响,从而导致协方差矩阵的噪声减小。衰减因子为 $\gamma$ 的指数加权协方差矩阵利用的时间序列有效长度为 $\frac{1}{\ln\gamma}$ ,因此, $\gamma$ 一定时,股票数量减小引起协方差矩阵噪声减小的原理与相等加权协方差矩阵类似。

对各种去噪法的组合风险优化表现进行分析。如前所述,随着股票数量的减小,相等加权和指数加权协方差矩阵的噪声都越来越小,这必然导致PR受到的噪声影响越来越小,于是各种去噪法引起的PR的增加都呈现减小的趋势。由图3和图4可知,各种去噪法都能通过去噪而提高组合风险预测准确率,但它们对其改进的程度并不相同。

由于MKR去噪法是基于模拟技术计算 $\lambda_+$ 的,无法实现100%的精确度,所以MKR去噪法计算的 $\lambda_+$ 并非一种精确无误解,且 $\lambda_+$ 的具体计算误差并不因 $N$ 的改变而变化。根据4.2节的分析,LCPB法、PG+法和KR法等原有RMT去噪法对 $\lambda_+$ 的计算误差却随 $N$ 的增大而减小。这导致当 $N$ 足够大时,原有RMT去噪法对 $\lambda_+$ 计算的精确度高于MKR去噪法,且两者的差距呈现随 $N$ 增大而扩大的趋势。如图5和图6所示,当 $N$ 取最大值400时,原有RMT去噪法和MKR去噪法对 $\lambda_+$ 计算结果之差达到最大。在 $N$ 逐渐减小的过程中,原有RMT去噪法和MKR去噪法对 $\lambda_+$ 计算差距出现减小的趋势,说明随着股票数量的减少,原有RMT去噪法对 $\lambda_+$ 计算的精确度不断下降,使原有RMT去噪法和MKR去噪法的去噪表现越来越接近。直至当股票数量减小到一定水平时,它们的去噪表现变得相同。对于相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵而言,原有RMT去噪法和MKR去噪法的去噪表现达到一致时的股票数量分别处于160~200和140~160的区间内。这与图5和图6的观察结果一致,由图5和图6可知,在相等加权和指数加权法下,当 $N$ 分别近似等于170和140时,原有RMT去噪法和MKR去噪法对 $\lambda_+$ 计算结果大致相等。在原有RMT去噪法和MKR去噪法的组合风险优化作用表现一致以后,当股票数量进一步减小,原有RMT去噪法引起的PR的增加开始变得低于MKR去噪法。此时原有RMT去噪法对噪声特征值的计算精度开始小于MKR去噪法,并且这种精度上的差距是随股票数量减小而不断增大的。 $\lambda_+$ 计算精度的上述变化特点可以由图5和图6直观地反映出来,由图5和图6可知,在原有RMT去噪法和MKR去噪法计算的 $\lambda_+$ 达到相同水平后,二者间出现了新的差距,即MKR去噪法计算的 $\lambda_+$ 的模拟解开始变得大于原有RMT去噪法计算的解析解,并且两者之差随 $N$ 的减小而增大。这样,在各种去噪法引起的PR的增加都在随 $N$ 不断减小而降低

的过程中,由于原有RMT去噪法对 $\lambda_+$ 计算精度越来越小于MKR法,所以它们引起的PR的增加比MKR法先降到0,即不再具有去噪作用。由图3和图4可知,当采用相等加权法计算协方差矩阵时,PG+法、LCPB法和KR法的去噪能力降到0时的股票数量分别是91、98和110。对于指数加权协方差矩阵而言,PG+法、LCPB法和KR法的去噪效果达到0时的股票数量分别为93、107和100。之后,当股票数量进一步减小时,原有RMT去噪法无法起到去噪作用,反而造成PR的下降。而此时MKR法的去噪作用仍然存在。不过,类似于原有RMT去噪法,当股票数量减小至某一更低水平时,MKR法也会由于无法满足低噪声时的高精度要求而失去去噪能力。在相等加权和指数加权法条件下,MKR法的去噪能力达到0时的股票数量分别为10和16。根据上面的分析,由于MKR法和原有RMT去噪法的差异主要体现在 $\lambda_+$ 的计算上,因此,股票数量较小时MKR法更好的去噪表现主要是由于 $\lambda_+$ 更高的计算精确度。

对相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵的PR进行比较分析。由图3和图4可知,在不同股票数量下,相等加权协方差矩阵去噪前的组合风险预测准确率都高于指数加权协方差矩阵去噪前的组合风险预测准确率。然而,相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵去噪后的结果却和去噪前的结果不同。当股票数量较大时,每一种去噪法对指数加权协方差矩阵去噪后的PR都高于对相等加权协方差矩阵去噪后的PR,而当股票数量降至接近100时,前者开始变得低于后者。如果将所有股票数量综合起来考虑,每一种去噪法对指数加权协方差矩阵去噪后的PR都大于对相等加权协方差矩阵去噪后的PR。根本来讲,这是因为每种去噪法引起的指数加权协方差矩阵的PR的增加都更大的缘故。

以上面分析为基础,对相等加权和指数加权法下PR的最佳结果进行分析。由图3和图4可知,如果将两种协方差矩阵综合起来考虑,会发现PR的最高值因股票数量不同而变化。当股票数量较大时,LCPB去噪法对指数加权协方差矩阵去噪后的PR最高。当股票数量较小时,MKR去噪法对相等加权协方差矩阵去噪后的PR最高。而当MKR去噪法对相等加权协方差矩阵没有去噪能力时,相等加权协方差矩阵未去噪时的PR结果是最好的。

## 7 结论

本研究指出了小组合风险优化条件下对协方差矩阵去噪的原有RMT方法因噪声特征值边界界定误差而产生的去噪效力下降的问题,并为解决该问题,采用蒙特卡洛模拟法确定样本协方差矩阵的最大噪声特征值,从而建立了蒙特卡洛RMT去噪法。通过实证分析,在股票收益序列长度和衰减因子不变时,在不同股票数量下对LCPB法、PG+法和KR法等原有RMT方法和蒙特卡洛RMT法的组合风险优化效果进行对比研究,研究结果如下。

(1)实际应用中股票数量 $N$ 是有限的,因此,原有RMT去噪法在 $N \rightarrow \infty$ 时计算的 $\lambda_+$ 会偏离于真正的 $\lambda_+$ 。由于该误差随 $N$ 的减小而增大,所以当对小组去噪时,对 $\lambda_+$ 的计算误差会上升至较高水平,这必然造成小组条件下原有RMT方法去噪效力的下降,并进一步对股票投资组合风险的优化带来不利的影响。

(2)各种RMT方法对相等加权协方差矩阵去噪前后的组合风险结果与指数加权协方差矩阵的组合风险结果非常类似。协方差矩阵未去噪时,随股票数量减小,组合风险预测的准确率越来越高,主要是因为股票数量的减小弱化了“维数灾祸”的作用,从而使协方差矩阵噪声减小。

(3)当股票数量足够大时,由于原有RMT去噪法对噪声特征值边界界定的精确度高于蒙特卡洛RMT去噪法,因此,原有RMT去噪法引起的组合风险优化水平的增加更大。随着股票数量的减小,相对于蒙特卡洛RMT去噪法,原有RMT去噪法的去噪优势因对噪声特征值边界界定误差的增大而呈减小趋势。直至当原有RMT去噪法的误差开始超过蒙特卡洛RMT去噪法的误差时,原有RMT去噪法的组合风险优化作用也开始变得低于蒙特卡洛RMT法。这说明蒙特卡洛RMT去噪法是一种解决小股票组合条件下原有RMT方法去噪效力下降的有效方法。

股票收益样本协方差矩阵含有的噪声会造成Markowitz股票投资组合风险优化水平的下降,而原有RMT去噪法在小组条件下的效力却很小,甚至为0或负值。针对原有RMT去噪法的上述缺陷,本研究设计了蒙特卡洛RMT去噪法。本研究能够为证券市场投资中股票投资组合的权重分配提供具体的方法,对证券投资决策及有关政策制定均有一定的借鉴意义。由于本研究的实证研究仅以中国股票数据为样本,没有考虑其他国家,如一些发达经济体的证券市场情况,所以可能会影响实证结果的普适性,这是后续研究中需要进一步解决的问题。

#### 参考文献:

- [1] 李洋,余丽霞. 基于马科维茨理论的最优证券组合分析. *财会月刊*, 2013(22):53-55.  
LI Yang, YU Lixia. Analysis of optimal stock portfolio based on Markowitz theory. *Finance and Accounting Monthly*, 2013(22):53-55. (in Chinese)
- [2] ZHANG M. Finite-sample linear filter optimization in wireless communications and financial systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(20):5014-5025.
- [3] 黄飞雪. 基于单链接聚类过滤法的均值方差模型. *预测*, 2011, 30(1):66-70.  
HUANG Feixue. Mean-variance based on filtered single linkage cluster. *Forecasting*, 2011, 30(1):66-70. (in Chinese)
- [4] 曾杏元. 有关随机矩阵领域最新研究动态与进展的综述报告. *数学理论与应用*, 2011, 31(3):7-19.
- [5] ZENG Xingyuan. A survey on the latest dynamic and progress of random matrix field. *Mathematical Theory and Applications*, 2011, 31(3):7-19. (in Chinese)
- [6] CHU Chen, FANG Zhaoben. Optimal portfolio project with modified covariance matrix and its stability. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2011, 41(12):1035-1041.
- [7] 毛磊,王宗军,王玲玲. 机构投资者持股偏好、筛选策略与企业社会绩效. *管理科学*, 2012, 25(3):21-33.  
MAO Lei, WANG Zongjun, WANG Lingling. Institutional investors preferences, screening and corporate social performance. *Journal of Management Science*, 2012, 25(3):21-33. (in Chinese)
- [8] 王明进. 多元波动率模型的一些新进展. *数理统计与管理*, 2010, 29(2):232-247.  
WANG Mingjin. Recent developments in multivariate volatility modeling. *Journal of Applied Statistics and Management*, 2010, 29(2):232-247. (in Chinese)
- [9] NGUYEN Q. One-factor model for the cross-correlation matrix in the Vietnamese stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2013, 392(13):2915-2923.
- [10] LIM K, KIM M J, KIM S, et al. Statistical properties of the stock and credit market: RMT and network topology. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2014, 407:66-75.
- [11] LALOUX L, CIZEAU P, POTTERS M, et al. Random matrix theory and financial correlations. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2000, 3(3):391-397.
- [12] LEE Y H. *Noise detection from financial correlation matrices*. (2001-05-19) [2015-05-14]. <http://web.mit.edu/bazant/www/teach/18.325/projects.lee.ps>.
- [13] PAFKA S, KONDOR I. Estimated correlation matrices and portfolio optimization. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2004, 343:623-634.
- [14] TOLA V, LILLO F. Cluster analysis for portfolio optimization. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 2008, 32(1):235-258.
- [15] PLEROU V, GOPIKRISHNAN P, ROSENOW B, et al. Random matrix approach to cross correlations in financial data. *Physical Review E*, 2002, 65(6):066126-1-066126-18.
- [16] SHARIFI S, CRANE M, SHAMAIE A, et al. Random matrix theory for portfolio optimization: a stability approach. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2004, 335(3/4):629-643.

- [16] DALY J, CRANE M, RUSKIN H J. Random matrix theory filters in portfolio optimisation: a stability and risk assessment. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2008, 387(16/17): 4248–4260.
- [17] KAROUI N E. On the realized risk of high-dimensional Markowitz portfolios. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2013, 4(1): 737–783.
- [18] RUBIO F, MESTRE X, PALOMAR D P. Performance analysis and optimal selection of large minimum variance portfolios under estimation risk. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2012, 6(4): 337–350.
- [19] WAKAI R, SHINZATO T, SHIMAZAKI Y. Random matrix approach for portfolio optimization problem. *Journal of Japan Industrial Management Association*, 2014, 65(1): 17–28.
- [20] TANG L C, CHEN Y N. Noise dressing of ECM and investment portfolio selection based on RMT in China financial market // *Proceedings of International Conference on Management & Service Science*. Piscataway: IEEE, 2010: 1–4.
- [21] OH G, EOM C, WANG F, et al. Statistical properties of cross-correlation in the Korean stock market. *The European Physical Journal B*, 2011, 79(1): 55–60.
- [22] 韩华, 吴翎燕, 宋宁宁. 基于随机矩阵的金融网络模型. *物理学报*, 2014, 63(13): 138901-1–138901-10.  
HAN Hua, WU Lingyan, SONG Ningning. Financial networks model based on random matrix. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(13): 138901-1–138901-10. (in Chinese)
- [23] ARAI Y, YOSHIKAWA T, IYETOMI H. Complex principal component analysis of dynamic correlations in financial markets // *Proceedings of the 5th KES International Conference on Intelligent Decision Technologies*. IOS Press, 2013: 111–119.
- [24] YANG J, WANG Z, LIU X, et al. Group identification in stock correlation networks with an application to portfolio selection. *Journal of Computational Information Systems*, 2014, 10(7): 2937–2949.
- [25] WANG D, PODOBNIK B, HORVATIC D, et al. Quantifying and modeling long-range cross correlations in multiple time series with applications to world stock indices. *Physical Review E*, 2011, 83(4): 046121-1–046121-9.
- [26] WANG G J, XIE C, CHEN S, et al. Random matrix theory analysis of cross-correlations in the US stock market: evidence from Pearson's correlation coefficient and detrended cross-correlation coefficient. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2013, 392(17): 3715–3730.
- [27] CONLON T, RUSKIN H J, CRANE M. Random matrix theory and fund of funds portfolio optimisation. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2007, 382(2): 565–576.
- [28] KUMAR S, DEO N. Correlation and network analysis of global financial indices. *Physical Review E*, 2012, 86(2): 026101-1–026101-8.
- [29] PAFKA S, POTTERS M, KONDOR I. Exponential weighting and random-matrix-theory-based denoising of financial covariance matrices for portfolio optimization. (2004-02-24) [2015-05-14]. <http://eprintweb.org/S/article/cond-mat/0402573/cited>.
- [30] DALY J, CRANE M, RUSKIN H J. Random matrix theory filters and currency portfolio optimisation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2010, 221: 1–14.
- [31] SANDOVAL L, Jr, BORTOLUZZO A B, VENEZUELA M K. Not all that glitters is RMT in the forecasting of risk of portfolios in the Brazilian stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2014, 410: 94–109.
- [32] 罗英, 蔡玉梅, 崔小梅, 等. 资产组合协方差矩阵的信息结构. *预测*, 2013, 32(4): 26–30.  
LUO Ying, CAI Yumei, CUI Xiaomei, et al. The information structure of the covariances between financial returns. *Forecasting*, 2013, 32(4): 26–30. (in Chinese)
- [33] 唐晓清, 白延琴, 刘念祖, 等. 基于随机矩阵理论的Markowitz组合投资模型. *上海大学学报: 自然科学版*, 2013, 19(3): 293–297.  
TANG Xiaoqing, BAI Yanqin, LIU Nianzu, et al. Markowitz portfolio model based on random matrix theory. *Journal of Shanghai University: Natural Science*, 2013, 19(3): 293–297. (in Chinese)
- [34] 惠晓峰, 李冰娜. 基于随机矩阵理论决定多元GARCH模型最佳维度研究. *运筹与管理*, 2011, 20(4): 141–148.  
HUI Xiaofeng, LI Bingna. Study on determining the optimal dimension of multi-GARCH Models based on random matrix theory. *Operations Research and Management Science*, 2011, 20(4): 141–148. (in Chinese)
- [35] CLARKE R, DESILVA H, THORLEY S. Minimum-variance portfolio composition. *The Journal of Portfolio Management*, 2011, 37(2): 31–45.
- [36] 瞿慧, 刘焯. 沪深300指数收益率及已实现波动联合建模研究. *管理科学*, 2012, 25(6): 101–110.  
QU Hui, LIU Ye. A joint model for CSI300 index return and realized volatility. *Journal of Management Science*, 2012, 25(6): 101–110. (in Chinese)

## Research on Risk Optimization of Small Stock Portfolio Based on the Filtering Method of RMT Using Monte Carlo Simulation

LI Bingna<sup>1</sup>, HUI Xiaofeng<sup>2</sup>, LI Lianjiang<sup>3</sup>

1 School of Economics, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China

2 School of Management, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China

3 School of Control Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China

**Abstract:** In the framework of classical Markowitz portfolio optimization problem, covariance matrices of stock returns obtained from historical data contain a high amount of noise, caused “curse of dimensions”, which will forbid the perfect construction of Markowitz portfolio and the optimization of its risk seriously. According to numerous studies, the filtering approaches based on random matrix theory are effective in reducing the estimation noise of financial covariance matrices and then achieving portfolio risk optimization.

Starting from the meaning of Markowitz stock portfolio risk, this work focuses on the accuracy of portfolio risk prediction as the measure for assessing optimal performance of portfolio risk and interprets the principle of the existing RMT-based filtering methods for stock return covariances. On this basis, we point out the calculation error of the maximum noisy eigenvalue in the existing RMT methods, which will turn out to reduce the effectiveness of these methods in the context of risk optimization of small portfolios. For any practical use of Markowitz portfolio theory, it would therefore be necessary to reduce this calculation error of the existing methods of RMT in the case of a small number of stocks. We introduce a new filtering method based on random matrix theory, which determines the theoretical edge of the random part of the eigenvalue distribution by a Monte Carlo simulation. Finally, we illustrate, on empirical data, the effect of the newly introduced method and the existing random-matrix-theory-based methods including LCPB, PG+ and KR on portfolio risk optimization.

Our empirical research has returned the following results. Firstly, whether covariance matrices of stock returns are filtered or unfiltered, it can be seen that, in general, the experimental results for equally weighted covariance matrices are very similar to those for exponentially weighted covariance matrices. Secondly, for unfiltered forecasts, the performance of portfolio risk is better when a smaller number of stocks is used for the estimation. The reason for this could be that the fewer stocks are used, the smaller amount of estimation noise can be in return covariance matrices. Thirdly, if enough stocks are taken into account, the existing RMT-based filters are superior to the newly proposed filter in terms of the risk optimization performance. However, the fewer the stocks are, the more inaccurately the maximum noisy eigenvalue in the existing filtering methods is calculated. As a consequence, the effectiveness of the existing filtering methods in the optimization of portfolio risk deteriorates as the portfolio size decreases. When the portfolio size is reduced to less than 200 stocks, the newly proposed filter begins to outperform the existing RMT filters. The results show that our novel filter is of great help in improving the effectiveness of the existing RMT-based filters in the context of risk optimization of small portfolios.

Combining the filtering procedure based on random matrix theory with the Monte Carlo simulation technique, the newly introduced filtering method can be very powerful in constructing portfolios with better weights allocation and improving the accuracy of portfolio risk prediction. In addition, our method also helps substantially in reasonable design of stock investment strategies and the optimization of stock investment risk.

**Keywords:** Markowitz investment portfolio; portfolio risk optimization; small portfolio; RMT based filtering method; Monte Carlo simulation

**Received Date:** June 24<sup>th</sup>, 2015      **Accepted Date:** March 4<sup>th</sup>, 2016

**Funded Project:** Supported by the National Natural Science Foundation of China(71401028), the Fundamental Research Funds for the Central Universities(N130323008) and the Funded by Northeastern University at Qinhuangdao(XNB201418)

**Biography:** LI Bingna, doctor in management, is a lecturer in the School of Economics at Northeastern University at Qinhuangdao. Her research interests include financial investment portfolio and risk management. Her representative paper titled “Optimization of stock portfolio risks based on correlation filtering using minimum perturbations of eigenvectors” was published in *The Journal of Systems Engineering – theory & Practice* (Issue 10, 2013). E-mail: libingna519@163.com

HUI Xiaofeng, doctor in management, is a professor in the School of Management at Harbin Institute of Technology. His research interests include exchange rate forecast, financial security and financial market efficiency. He is the principal researcher for the project titled “Disclosure of listed firms and capital costs” supported by the National Natural Science Foundation of China(70573030). E-mail: xfhui@hit.edu.cn

LI Lianjiang, doctor in engineering, is a lecturer in the School of Control Engineering at Northeastern University at Qinhuangdao. His research interests include multidisciplinary combined simulation. His representative paper titled “Research on improvement of lidar imaging quality based on fusion technology” was published in *Lasers in Engineering* (Issue 1-2, 2012). E-mail: lilianjiangpro@163.com