



# 自刺激跳跃与随机波动率交叉反馈下的期权定价

潘冬涛, 马勇

湖南大学 金融与统计学院, 长沙 410006

**摘要:** 构建合理的资产价格模型一直都是期权定价研究的核心问题之一, 其中波动率和跳跃又是资产价格模型中的重要研究对象。已有实证研究发现资产价格存在跳跃聚集现象, 该现象在金融危机期间尤为明显; 同时, 资产价格的波动率也存在跳跃, 且资产价格的跳跃与波动率之间还存在非对称的交叉反馈作用。因此, 将上述特征纳入期权定价模型中, 有助于提高模型的期权定价性能, 且能使模型更准确地估计隐含波动率。

为了刻画资产价格的跳跃聚集、波动率跳跃以及跳跃与波动率之间的非对称交叉反馈特征, 在仿射跳扩散框架下, 构建用于期权定价的自刺激跳跃与随机波动率交叉反馈模型, 并利用风险中性定价、广义傅里叶变换和条件特征函数, 求出欧式期权价格的半解析表达式。采用上证50ETF期权数据对模型进行校准, 并对比分析模型对期权价格以及隐含波动率的拟合和预测能力。

研究结果表明, 上证50ETF的价格与其波动率呈负相关, 呈现杠杆效应和负向的波动率反馈效应, 价格存在上跳和下跳聚集, 价格的波动率与跳跃之间存在非对称的交叉反馈作用, 下跳对波动率的影响大于上跳对波动率的影响, 而波动率对下跳强度的影响大于其对上跳强度的影响, 该特征能很好地解释股灾期间股价崩盘现象。无论是股灾期间还是市场平稳期间, 与两个基准模型相比, 自刺激跳跃与随机波动率交叉反馈模型具有更好的期权价格拟合和预测能力, 且在隐含波动率的拟合和预测上也更优。

研究结果拓展了期权定价的理论模型, 为上证50ETF价格的跳跃聚集以及跳跃与波动率之间的非对称交叉反馈现象提供了证据; 通过比较不同模型对期权价格和隐含波动率的拟合、预测能力, 验证了在资产价格模型中加入跳跃聚集特征以及跳跃与波动率的非对称交叉反馈特征的合理性和重要性, 对投资者进行合理的期权估价和实行有效的风险对冲策略具有实际指导意义。

**关键词:** 上证50ETF; 期权定价; 跳跃聚集; 随机波动率; 交叉反馈

**中图分类号:** F830.9

**文献标识码:** A

**doi:** 10.3969/j.issn.1672-0334.2022.05.009

**文章编号:** 1672-0334(2022)05-0127-17

## 引言

期权作为当前最活跃的金融衍生品之一, 被广泛运用于风险管理和资产配置等方面。随着全球金融市场的不断发展, 期权在金融业的地位越来越重要。

一方面, 日益增加的多元化投资和风险管理的需求使投资者对期权产品的需求越来越强烈; 另一方面, 金融创新推动全球金融业飞速发展, 期权正是金融创新中十分关键的金融衍生工具之一。中国于2015

**收稿日期:** 2021-04-16 **修返日期:** 2021-12-07

**基金项目:** 国家自然科学基金(71971077); 湖南省优秀青年科学基金(2019JJ30001)

**作者简介:** 潘冬涛, 湖南大学金融与统计学院博士研究生, 研究方向为金融工程和资产定价等, 代表性学术成果为“Exchange options under clustered jump dynamics”, 发表在2020年第6期《Quantitative Finance》, E-mail: [dtpan@hnu.edu.cn](mailto:dtpan@hnu.edu.cn)  
马勇, 管理学博士, 湖南大学金融与统计学院教授, 研究方向为金融工程和风险管理等, 代表性学术成果为“Pricing vulnerable options with jump clustering”, 发表在2017年第12期《Journal of Futures Markets》, E-mail: [yama@hnu.edu.cn](mailto:yama@hnu.edu.cn)

年正式推出国内首个欧式期权产品,标志着中国股票期权市场的正式诞生。考虑到期权在金融中的重要地位,对期权进行研究,无论在学术上还是实践中都有极其重要的意义。由于期权定价是期权研究的核心问题,合理的期权价格关系到期权市场能否健康、稳定和有序的发展。因此,如何对期权进行合理的定价,对于学术机构和金融部门都是十分重要的课题。

在目前的期权定价研究中,学者们一般采用随机波动率和跳扩散模型对资产价格进行建模,其中资产价格各跳跃事件之间往往是相互独立的。但是,2008年的全球金融危机表明,资本市场中的跳跃存在时间上的关联,表现为跳跃聚集现象。简单来说,跳跃聚集即为资产价格在某一时期内出现连续暴涨或暴跌的现象。显然,假定跳跃为独立增量的跳扩散模型无法刻画资产价格中的跳跃聚集现象。此外,学者们在一些实证研究中发现,不仅资产价格发生跳跃,波动率同样也发生跳跃,资产价格的跳跃与波动率之间还存在交叉反馈,即资产价格的跳跃影响波动率,波动率也反过来影响资产价格的跳跃。由于经典的随机波动率模型不存在跳跃项,无法刻画波动率跳跃的特征。因此,有必要构建更加符合现实的资产定价模型用于期权定价,以刻画真实世界中资产价格变化的的大多数特征,从而弥补已有模型的不足。针对已有资产价格模型的缺陷,在近期的研究中陆续出现了一些新的模型,其中,一部分能刻画波动率的跳跃以及资产价格跳跃与波动率之间的交互作用,另一部分能捕捉资产价格的跳跃聚集特征。而根据实证研究中观测到的资产价格特征,构建能同时刻画跳跃聚集、波动率跳跃以及资产价格跳跃与波动率之间交叉反馈作用的资产价格模型用于期权定价,将有助于提高期权定价模型的合理性和准确性,也有利于进一步发展期权定价理论。

## 1 相关研究评述

经典的期权定价模型假定标的资产价格服从具有常数波动率的几何布朗运动,但这种模型既无法刻画实际观测中资产价格出现的跳跃现象,也无法解释实际应用中资产价格的隐含波动率曲线存在倾斜或向下弯曲的现象,即“波动率微笑”。针对上述问题,一方面,学者们尝试将模型中的常数波动率替换为随机波动率,构建随机波动率模型<sup>[1]</sup>;另一方面,尝试在原有模型中加入跳跃项,即用跳扩散过程为标的资产价格建模,其中跳跃项大多为具有独立增量性的 Poisson 过程或其他 Lévy 纯跳过程<sup>[2-3]</sup>,跳跃强度往往是固定的或非随机时变的。然而,实证研究发现,资产价格的跳跃强度实际上可能是随机时变的,且跳跃之间还存在聚集现象<sup>[4-5]</sup>。针对中国市场的实证研究同样发现了资产价格的跳跃聚集现象。陈国进等<sup>[6]</sup>发现股价的跳跃强度依赖于历史信息,且跳跃具有明显的聚集性;马勇等<sup>[7]</sup>的研究表明股价的暴涨暴跌具有很强的自我刺激和交叉刺激。上

述实证研究表明,资产价格中的跳跃具有时间上的聚集性,Lévy 过程显然无法刻画这些特征。因此,部分学者尝试采用能捕捉跳跃聚集特征的 Hawkes 跳扩散模型对期权定价进行研究。在 Hawkes 跳扩散模型中跳跃项为一个复合 Hawkes 过程,其为 HAWKES<sup>[8]</sup>提出的一类具备自刺激和交叉刺激特征的点过程。在 Hawkes 过程中,自刺激是指资产价格跳跃事件的发生能够增大自身的跳跃强度,从而刺激其发生新的跳跃事件;交叉刺激是指一个资产价格跳跃事件的发生能够增大另一个资产价格的跳跃强度,从而刺激另一个资产价格发生新的跳跃事件。这种结构特征使 Hawkes 跳扩散模型能很好地刻画资产价格中的跳跃聚集现象,因此近年来逐渐被运用于金融领域的各类研究中。例如,对不同个股之间股价的共同跳跃行为进行建模<sup>[9-10]</sup>,研究中美股指之间的跳跃关联<sup>[11]</sup>,研究金融资产价格的尾部风险溢酬<sup>[12]</sup>,研究方差互换合约的定价<sup>[13]</sup>和信用违约互换合约的定价<sup>[14]</sup>等。

在期权定价方面,KOKHOLM<sup>[15]</sup>采用 Hawkes 随机波动率跳扩散模型对普通欧式期权定价进行研究;JING et al.<sup>[16-17]</sup>和马勇等<sup>[18]</sup>采用 Hawkes 随机波动率跳扩散模型对 VIX 期权定价进行研究。一部分学者还基于 Hawkes 跳扩散模型对一些场外期权和奇异期权的定价进行研究,包括脆弱期权<sup>[19]</sup>、交换期权<sup>[20-21]</sup>、外国股票期权<sup>[22]</sup>和亚式期权<sup>[23]</sup>等。此外,一些关于期权定价的研究对 Hawkes 过程进行拓展,在标准 Hawkes 过程的基础上加入扩散项。ZHANG et al.<sup>[24]</sup>采用拓展的 Hawkes 跳扩散模型对利率进行建模,研究债券和期权的定价问题;PASRICHA et al.<sup>[25]</sup>基于拓展的 Hawkes 跳扩散模型对幂型脆弱交换期权进行定价。

另外,针对资产价格波动率的实证研究发现,波动率同样发生跳跃,并且波动率的跳跃受资产价格跳跃的影响。BROADIE et al.<sup>[26]</sup>在基于标普 500 期货和期权的实证研究中发现了波动率跳跃现象;TODOROV et al.<sup>[27]</sup>通过 VIX 指数发现大多数情况下波动率和价格会同时间发生方向相反的跳跃;FULOP et al.<sup>[28]</sup>发现资产收益率的负向跳跃影响其波动率。针对中国市场,王春峰等<sup>[29]</sup>和杨科等<sup>[30]</sup>基于高频数据发现股市的波动率存在跳跃现象;吴恒煜等<sup>[31]</sup>发现资产价格的跳跃存在显著的杠杆效应。因此,在对期权的标的资产价格进行建模时,有必要将波动率的跳跃也纳入模型中。DUFFIE et al.<sup>[32]</sup>提出资产和波动率均具有跳跃项的随机波动率双跳跃模型,能够刻画资产价格与波动率的联跳现象;ERAKER et al.<sup>[33-34]</sup>构建用于欧式期权定价的随机波动率联跳模型;宫晓莉等<sup>[35]</sup>在随机波动率联跳模型的基础上假定跳跃项服从广义双指数分布,构建广义双指数分布驱动的双层跳跃扩散模型。后续基于随机波动率双跳跃模型的期权定价研究包括 VIX 期权定价<sup>[36-37]</sup>、脆弱期权定价<sup>[38]</sup>、比特币期权定价<sup>[39]</sup>和重置期权定价<sup>[40]</sup>等,而宫晓莉等<sup>[41]</sup>则采用调和稳定 Lévy 过程驱动的随机波动率双跳跃模型研究期权定价。另外,

ERAKER<sup>[34]</sup>认为不仅跳跃影响波动率,波动率也影响跳跃,于是尝试将波动率引入到跳跃强度中,构建跳跃强度依赖于随机波动率的联跳模型; DAAL et al.<sup>[42]</sup>和陈浪南等<sup>[43]</sup>通过实证研究验证了 ERAKER<sup>[34]</sup>的观点,他们发现资产价格的波动率对跳跃强度有显著影响,同时资产价格的跳跃对波动率的作用是非对称的,下跳对波动率的影响大于上跳的影响。还有学者将资产价格跳跃与波动率的交互作用纳入离散时间的 GARCH 类模型中,并用于期权定价。朱福敏等<sup>[44]</sup>利用混合 GARCH 跳跃模型对期权进行定价,其模型同时包含了跳跃的自刺激以及跳跃与波动率的交叉反馈作用。但该模型下的期权价格不存在显式解。DU et al.<sup>[45]</sup>将 Hawkes 过程与随机波动率联跳模型结合在一起,建立 Hawkes 随机波动率联跳模型,对标普 500 指数和期权进行研究。但模型中并未考虑跳跃强度与波动率之间的交互作用。

综上所述,广泛用于期权定价的带 Lévy 跳跃的随机波动率跳扩散模型存在明显不足,无法刻画实证研究中广泛发现的跳跃聚集和波动率跳跃等现象。尽管近期发展的一些资产价格模型,如 Hawkes 随机波动率跳扩散模型、随机波动率联跳模型和混合 GARCH 跳跃模型等,能在一定程度上弥补该不足,但目前还没有囊括跳跃聚集、波动率跳跃以及资产价格跳跃与波动率交叉反馈特征的连续时间期权定价模型。因此,本研究将构建包含上述特征的期权定价模型,在此基础上推导出具有半解析形式的期权定价公式,并通过实证探讨本模型的定价能力。

## 2 自刺激跳跃与随机波动率交叉反馈模型

### 2.1 构建模型

令  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  为概率空间,  $\Omega$  为样本空间,  $\mathcal{F}$  为  $\sigma$  代数,  $Q$  为风险中性测度。令  $S_t$  为标的资产价格过程,  $Y_t$  为对数价格过程,  $Y_t = \log S_t$ , 定义  $Y_t$  的微分形式为

$$dY_t = [r - q - E(e^{\varepsilon_{U,t}} - 1)\lambda_{U,t} - E(e^{-\varepsilon_{D,t}} - 1)\lambda_{D,t} - \frac{1}{2}V_t]dt + \sqrt{V_t}(\rho dW_{V,t} + \sqrt{1-\rho^2}dW_{Y,t}) + \varepsilon_{U,t}dN_{U,t} - \varepsilon_{D,t}dN_{D,t} \quad (1)$$

其中,  $t$  为时间;  $r$  为无风险利率;  $q$  为股息率;  $E$  为  $Q$  测度下的期望;  $\varepsilon_{U,t}$  为向上跳跃的幅度,  $\varepsilon_{D,t}$  为向下跳跃的幅度, 均为严格平稳的非负独立随机过程;  $N_{U,t}$  和  $N_{D,t}$  为点过程,  $N_{U,t}$  为对数价格向上跳跃的次数,  $\lambda_{U,t}$  为其强度过程,  $N_{D,t}$  为对数价格向下跳跃的次数,  $\lambda_{D,t}$  为其强度过程;  $V_t$  为方差过程;  $\rho$  为对数价格与随机波动率之间的相关系数,  $-1 \leq \rho \leq 1$ ;  $W_{V,t}$  和  $W_{Y,t}$  为相互独立的两个维纳过程。本研究所有变量的下标中,  $V$  表示方差,  $Y$  表示对数价格,  $U$  表示向上的跳跃,  $D$  表示向下的跳跃。结合 (1) 式和  $Y_t = \log S_t$ , 可得

$$\frac{dS_t}{S_t} = [r - q - E(e^{\varepsilon_{U,t}} - 1)\lambda_{U,t} - E(e^{-\varepsilon_{D,t}} - 1)\lambda_{D,t}]dt + \sqrt{V_t}(\rho dW_{V,t} + \sqrt{1-\rho^2}dW_{Y,t}) + (e^{\varepsilon_{U,t}} - 1)dN_{U,t} + (e^{-\varepsilon_{D,t}} - 1)dN_{D,t} \quad (2)$$

参考 ERAKER et al.<sup>[33]</sup> 提出的随机波动率联跳过程, 定义本模型方差过程的微分形式为

$$dV_t = \kappa(\xi - V_t)dt + \varphi\sqrt{V_t}dW_{V,t} + \delta_U\varepsilon_{U,t}dN_{U,t} + \delta_D\varepsilon_{D,t}dN_{D,t} \quad (3)$$

其中,  $\kappa$  为方差回归到长期水平的指数速率,  $\kappa > 0$ ;  $\xi$  为方差的长期水平,  $\xi > 0$ ;  $\varphi$  为方差的波动率,  $\varphi > 0$ ;  $\delta_U$  为资产价格上跳对方差的影响,  $\delta_U \geq 0$ ;  $\delta_D$  为资产价格下跳对方差的影响,  $\delta_D \geq 0$ 。由 (3) 式可知, 方差和资产价格拥有共同的跳跃项  $N_{U,t}$  和  $N_{D,t}$ 。若  $t$  时刻资产价格产生幅度为  $\varepsilon_{U,t}$  的上跳, 其方差立即增加  $\delta_U\varepsilon_{U,t}$ ; 若  $t$  时刻资产价格产生幅度为  $\varepsilon_{D,t}$  的下跳, 其方差立即增加  $\delta_D\varepsilon_{D,t}$ 。当  $\delta_U = \delta_D = 0$  时, (1) 式退化为 Heston 随机波动率模型。将 ERAKER<sup>[34]</sup> 提出的与方差线性相关的跳跃强度过程以及 KOKHOLM<sup>[15]</sup> 在资产价格跳跃强度的建模中采用的 Hawkes 过程相结合, 定义本模型的强度过程为

$$\begin{cases} \lambda_{U,t} = a_U + b_U V_t + \theta_{UU} \int_{-\infty}^t e^{-\eta_U(t-s)} \varepsilon_{U,s} dN_{U,s} + \theta_{UD} \int_{-\infty}^t e^{-\eta_U(t-s)} \varepsilon_{D,s} dN_{D,s} \\ \lambda_{D,t} = a_D + b_D V_t + \theta_{DU} \int_{-\infty}^t e^{-\eta_D(t-s)} \varepsilon_{U,s} dN_{U,s} + \theta_{DD} \int_{-\infty}^t e^{-\eta_D(t-s)} \varepsilon_{D,s} dN_{D,s} \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $s$  为被积的随机过程路径对应的时间变量,  $s \in (-\infty, t]$ ;  $a_U$  和  $a_D$  为常数,  $a_U > 0$ ,  $a_D > 0$ ;  $b_U$  为方差对上跳强度的影响,  $b_U \geq 0$ ;  $b_D$  为方差对下跳强度的影响,  $b_D \geq 0$ ;  $\theta_{UU}$  为上跳对自身强度的直接影响,  $\theta_{UU} \geq 0$ ;  $\theta_{UD}$  为上跳对下跳强度的直接影响,  $\theta_{UD} \geq 0$ ;  $\theta_{DU}$  为下跳对上跳强度的直接影响,  $\theta_{DU} \geq 0$ ;  $\theta_{DD}$  为下跳对自身强度的直接影响,  $\theta_{DD} \geq 0$ ;  $\eta_U$  为上跳强度回归到长期水平的固有指数速率,  $\eta_U > 0$ ;  $\eta_D$  为下跳强度回归到长期水平的固有指数速率,  $\eta_D > 0$ 。(4) 式中的积分是对随机过程  $N_{U,t}$ 、 $N_{D,t}$ 、 $\varepsilon_{U,t}$  和  $\varepsilon_{D,t}$  在  $t$  时刻之前的路径进行积分。 $\lambda_{U,t}$  和  $\lambda_{D,t}$  的微分形式满足

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d\lambda_{U,t} \\ d\lambda_{D,t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \eta_U(a_U + b_U\xi - \lambda_{U,t}) + b_U(\kappa - \eta_U)(\xi - V_t) \\ \eta_D(a_D + b_D\xi - \lambda_{D,t}) + b_D(\kappa - \eta_D)(\xi - V_t) \end{pmatrix} dt + \\ &\begin{pmatrix} b_U \\ b_D \end{pmatrix} \varphi \sqrt{V_t} dW_{V,t} + \begin{pmatrix} \theta_{UU} + b_U\delta_U \\ \theta_{DU} + b_D\delta_U \end{pmatrix} \varepsilon_{U,t} dN_{U,t} + \\ &\begin{pmatrix} \theta_{UD} + b_U\delta_D \\ \theta_{DD} + b_D\delta_D \end{pmatrix} \varepsilon_{D,t} dN_{D,t} \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $(a_U + b_U\xi)$  为上跳强度的长期水平,  $(a_D + b_D\xi)$  为下跳强度的长期水平。由 (5) 式可知, 若  $t$  时刻资产价格产生幅度为  $\varepsilon_{U,t}$  的上跳, 其上跳强度立即增加  $(\theta_{UU} + b_U\delta_U)\varepsilon_{U,t}$ , 下跳强度立即增加  $(\theta_{DU} + b_D\delta_U)\varepsilon_{U,t}$ ; 若  $t$  时刻资产价格产生幅度为  $\varepsilon_{D,t}$  的下跳, 其上跳强度立即增加  $(\theta_{UD} + b_U\delta_D)\varepsilon_{D,t}$ , 下跳强度立即增加  $(\theta_{DD} + b_D\delta_D)\varepsilon_{D,t}$ 。上述各跳跃强度的增幅又可以分为两部分, 以资产价格上跳时  $\lambda_{U,t}$  的增幅为例, 其可分为  $\theta_{UU}\varepsilon_{U,t}$  和  $b_U\delta_U\varepsilon_{U,t}$  两部分,  $\theta_{UU}\varepsilon_{U,t}$  为资产价格上跳对  $\lambda_{U,t}$  的直接影响,  $b_U\delta_U\varepsilon_{U,t}$  为资产价格上跳通过方差的传导后对  $\lambda_{U,t}$  的间接影响。其余情况的跳跃强度的增幅同理。当  $b_U = b_D = 0$  且  $\theta_{UU} > 0$ 、 $\theta_{UD} > 0$ 、 $\theta_{DU} > 0$ 、 $\theta_{DD} > 0$  时,  $N_{U,t}$  和  $N_{D,t}$  将退化成 Hawkes 过程; 当  $b_U = b_D = \theta_{UU} =$

$\theta_{UD} = \theta_{DU} = \theta_{DD} = 0$  时,  $N_{U,t}$  和  $N_{D,t}$  将退化成 Poisson 过程。此外, 当  $\kappa \neq \eta_U$ 、 $\kappa \neq \eta_D$  时,  $V_t$  的大小对  $\lambda_{U,t}$  和  $\lambda_{D,t}$  回归到长期水平的速度产生影响; 当  $\kappa = \eta_U = \eta_D$  时没有影响。具体而言, 以  $\lambda_{U,t}$  为例, 与  $\kappa = \eta_U$  时相比, 当  $\kappa > \eta_U$  ( $\kappa < \eta_U$ ) 时, 若  $\lambda_{U,t} > a_U + b_U \xi$  且  $\eta_U(a_U + b_U \xi - \lambda_{U,t}) + b_U(\kappa - \eta_U)(\xi - V_t) < 0$ , 则  $V_t > \xi$  会使  $\lambda_{U,t}$  回归到长期水平的速度更快(更慢),  $V_t < \xi$  会使  $\lambda_{U,t}$  回归到长期水平的速度更慢(更快); 若  $\lambda_{U,t} < a_U + b_U \xi$  且  $\eta_U(a_U + b_U \xi - \lambda_{U,t}) + b_U(\kappa - \eta_U)(\xi - V_t) > 0$ , 则由 (4) 式可得  $V_t < \xi$ , 此时  $\lambda_{U,t}$  回归到长期水平的速度更快(更慢)。  $\lambda_{D,t}$  的情况亦然。

**2.2 条件特征函数**

令  $X_t$  表示由  $Y_t$ 、 $V_t$ 、 $\lambda_{U,t}$  和  $\lambda_{D,t}$  组成的 4 维随机列向量, 即  $X_t = (Y_t, V_t, \lambda_{U,t}, \lambda_{D,t})'$ 。根据 DUFFIE et al.<sup>[32]</sup> 和 KO-KHOLM<sup>[15]</sup> 对仿射跳扩散过程的定义, 结合 (1) 式、(3) 式和 (5) 式可知,  $X_t$  在风险中性测度下为 4 维的仿射跳扩散过程, 满足

$$dX_t = \begin{pmatrix} dY_t \\ dV_t \\ d\lambda_{U,t} \\ d\lambda_{D,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - q - \frac{1}{2}V_t - E(e^{\varepsilon_{U,t}} - 1)\lambda_{U,t} - E(e^{-\varepsilon_{D,t}} - 1)\lambda_{D,t} \\ \kappa\xi - \kappa V_t \\ a_U\eta_U + b_U\kappa\xi + b_U(\eta_U - \kappa)V_t - \eta_U\lambda_{U,t} \\ a_D\eta_D + b_D\kappa\xi + b_D(\eta_D - \kappa)V_t - \eta_D\lambda_{D,t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \rho\sqrt{V_t} \\ \varphi\sqrt{V_t} \\ b_U\varphi\sqrt{V_t} \\ b_D\varphi\sqrt{V_t} \end{pmatrix} dW_{V,t} + \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{V_t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dW_{Y,t} + \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_U \\ \theta_{UU} + b_U\delta_U \\ \theta_{DU} + b_D\delta_U \end{pmatrix} \varepsilon_{U,t} dN_{U,t} + \begin{pmatrix} -1 \\ \delta_D \\ \theta_{UD} + b_U\delta_D \\ \theta_{DD} + b_D\delta_D \end{pmatrix} \varepsilon_{D,t} dN_{D,t} \quad (6)$$

令  $W_t = (W_{V,t}, W_{Y,t})'$ ,

$$L_0 = \begin{pmatrix} r - q \\ \kappa\xi \\ a_U\eta_U + b_U\kappa\xi \\ a_D\eta_D + b_D\kappa\xi \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 - Ee^{\varepsilon_{U,t}} & 1 - Ee^{-\varepsilon_{D,t}} \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & b_U(\eta_U - \kappa) & -\eta_U & 0 \\ 0 & b_D(\eta_D - \kappa) & 0 & -\eta_D \end{pmatrix}$$

$$Y_t = \begin{pmatrix} \rho\sqrt{V_t} & \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{V_t} \\ \varphi\sqrt{V_t} & 0 \\ b_U\varphi\sqrt{V_t} & 0 \\ b_D\varphi\sqrt{V_t} & 0 \end{pmatrix}$$

$Z_{U,t} = (1, \delta_U, \theta_{UU} + b_U\delta_U, \theta_{DU} + b_D\delta_U)' \varepsilon_{U,t}$

$Z_{D,t} = (-1, \delta_D, \theta_{UD} + b_U\delta_D, \theta_{DD} + b_D\delta_D)' \varepsilon_{D,t}$

则 (6) 式可写为  $dX_t = (L_0 + L_1 X_t)dt + Y_t dW_t + Z_{U,t} dN_{U,t} +$

$Z_{D,t} dN_{D,t}$ 。令

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} J & \rho\varphi J & \rho b_U \varphi J & \rho b_D \varphi J \\ \rho\varphi J & \varphi^2 J & b_U \varphi^2 J & b_D \varphi^2 J \\ \rho b_U \varphi J & b_U \varphi^2 J & b_U^2 \varphi^2 J & b_U b_D \varphi^2 J \\ \rho b_D \varphi J & b_D \varphi^2 J & b_U b_D \varphi^2 J & b_D^2 \varphi^2 J \end{pmatrix}$$

其中,  $J = (0, 1, 0, 0)$ ; 并令  $(Y_t Y_t')$ <sub>*j,k*</sub> 为矩阵  $Y_t Y_t'$  第 *j* 行第 *k* 列的元素,  $(H_0)$ <sub>*j,k*</sub> 为矩阵  $H_0$  第 *j* 行第 *k* 列的元素,  $(H_1)$ <sub>*j,k*</sub> 为矩阵  $H_1$  第 *j* 行第 *k* 列的元素, 得  $(Y_t Y_t')$ <sub>*j,k*</sub> =  $(H_0)$ <sub>*j,k*</sub> +  $(H_1)$ <sub>*j,k*</sub>  $X_t$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ 。最后,  $\lambda_{U,t}$  可改写为  $\lambda_{U,t} = \Lambda_{U,0} + \Lambda_{U,1} X_t$ ,  $\lambda_{D,t}$  可改写为  $\lambda_{D,t} = \Lambda_{D,0} + \Lambda_{D,1} X_t$ ,  $\Lambda_{U,0} = \Lambda_{D,0} = 0$ ,  $\Lambda_{U,1} = (0, 0, 1, 0)$ ,  $\Lambda_{D,1} = (0, 0, 0, 1)$ 。令  $w$  为任意的一个 4 维的复向量, 即  $w \in C^4$ , 同时令  $\theta$  为 (1) 式 ~ (5) 式中所有参数构成的集合, 并令  $T \geq t$ , 则期望  $E(e^{w X_T} | \mathcal{F}_t)$  可以表示为关于  $w$ 、 $X_t$ 、 $t$ 、 $T$  和  $\theta$  的某个函数的值, 本研究将其称为风险中性测度下  $X_T$  在  $t$  时刻的条件特征函数, 记为  $\Phi$ 。根据 DUFFIE et al.<sup>[32]</sup> 关于仿射跳扩散过程的条件特征函数的推导结果, 可以得

$$\Phi(w, X_t, t, T, \theta) = E(e^{w X_T} | \mathcal{F}_t) = e^{\alpha(w, t, T, \theta) + \beta(w, t, T, \theta) X_t} \quad (7)$$

其中,  $\alpha$  为关于  $w$ 、 $t$ 、 $T$  和  $\theta$  的函数, 其值域为  $C$ ;  $\beta$  为关于  $w$ 、 $t$ 、 $T$  和  $\theta$  的 4 维的向量函数, 其值域为  $C^4$ 。令  $\beta(w, t, T, \theta) = [\beta_1(w, t, T, \theta), \beta_2(w, t, T, \theta), \beta_3(w, t, T, \theta), \beta_4(w, t, T, \theta)]$ , 其中  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$  和  $\beta_4$  均为关于  $w$ 、 $t$ 、 $T$  和  $\theta$  的函数, 且  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$  和  $\beta_4$  的值域均为  $C$ 。为了方便书写, 令  $\Phi(w, X_t, t)$  为  $\Phi(w, X_t, t, T, \theta)$  的简化记法,  $\alpha(w, t)$  为  $\alpha(w, t, T, \theta)$  的简化记法,  $\beta(w, t)$  为  $\beta(w, t, T, \theta)$  的简化记法,  $\beta_j(w, t)$  为  $\beta_j(w, t, T, \theta)$  的简化记法,  $j = 1, 2, 3, 4$ 。  $\alpha(w, t)$  和  $\beta(w, t)$  满足以下微分方程, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha(w, t)}{\partial t} = -\beta(w, t) L_0 - \frac{1}{2} \beta(w, t) H_0 [\beta(w, t)]' - \\ \quad [E(e^{\beta(w, t) Z_{U,t}}) - 1] \Lambda_{U,0} - [E(e^{\beta(w, t) Z_{D,t}}) - 1] \Lambda_{D,0} \\ \frac{\partial \beta(w, t)}{\partial t} = -\beta(w, t) L_1 - \frac{1}{2} \beta(w, t) H_1 [\beta(w, t)]' - \\ \quad [E(e^{\beta(w, t) Z_{U,t}}) - 1] \Lambda_{U,1} - [E(e^{\beta(w, t) Z_{D,t}}) - 1] \Lambda_{D,1} \end{cases} \quad (8)$$

(8) 式的边界条件为  $\alpha(w, T) = 0$  和  $\beta(w, T) = w$ 。上述微分方程通常不存在解析解, 因此实践中需要通过一些数值方法求解  $\alpha(w, t)$  和  $\beta(w, t)$ , 如 Runge-Kutta 法等。令  $\tilde{w}$  为任意的一个复数, 即  $\tilde{w} \in C$ , 则期望  $E(e^{\tilde{w} Y_T} | \mathcal{F}_t)$  可以表示为关于  $\tilde{w}$ 、 $X_t$ 、 $t$ 、 $T$  和  $\theta$  的某个函数的值, 本研究将其称为风险中性测度下  $Y_T$  在  $t$  时刻的条件特征函数, 记为  $\Phi_Y$ 。显然,  $\Phi_Y(\tilde{w}, X_t, t) = E(e^{\tilde{w} Y_T} | \mathcal{F}_t) = E(e^{\tilde{w} I X_T} | \mathcal{F}_t) = \Phi(\tilde{w} I, X_t, t)$ , 其中  $I = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\Phi_Y(\tilde{w}, X_t, t)$  为  $\Phi_Y(\tilde{w}, X_t, t, T, \theta)$  的简化记法。为了得到  $\Phi_Y(\tilde{w}, X_t, t)$  的具体表达式, 需要求解  $\alpha(\tilde{w} I, t)$  和  $\beta(\tilde{w} I, t)$ 。由 (8) 式可得  $\beta_1(\tilde{w} I, t) = \tilde{w}$ ,  $\beta_2(\tilde{w} I, t)$ 、 $\beta_3(\tilde{w} I, t)$  和  $\beta_4(\tilde{w} I, t)$  分别满足以

下微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_2(\tilde{w}I, t)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \tilde{w} + \kappa \beta_2(\tilde{w}I, t) + b_U(\kappa - \eta_U) \beta_3(\tilde{w}I, t) + \\ & b_D(\kappa - \eta_D) \beta_4(\tilde{w}I, t) - \frac{1}{2} \{(1 - \rho^2) \tilde{w}^2 + \\ & [\rho \tilde{w} + \varphi \beta_2(\tilde{w}I, t) + b_U \varphi \beta_3(\tilde{w}I, t) + \\ & b_D \varphi \beta_4(\tilde{w}I, t)]^2 \} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_3(\tilde{w}I, t)}{\partial t} = & (Ee^{\varepsilon_{U,t}} - 1) \tilde{w} + \eta_U \beta_3(\tilde{w}I, t) - \\ & E\{e^{[\tilde{w} + \delta_U \beta_2(\tilde{w}I, t) + (\theta_{UU} + b_U \delta_U) \beta_3(\tilde{w}I, t) + (\theta_{DU} + b_D \delta_U) \beta_4(\tilde{w}I, t)] \varepsilon_{U,t}}\} + 1 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_4(\tilde{w}I, t)}{\partial t} = & (Ee^{-\varepsilon_{D,t}} - 1) \tilde{w} + \eta_D \beta_4(\tilde{w}I, t) - \\ & E\{e^{[-\tilde{w} + \delta_D \beta_2(\tilde{w}I, t) + (\theta_{DD} + b_D \delta_D) \beta_3(\tilde{w}I, t) + (\theta_{DD} + b_D \delta_D) \beta_4(\tilde{w}I, t)] \varepsilon_{D,t}}\} + 1 \end{aligned} \quad (11)$$

以及

$$\begin{aligned} \alpha(\tilde{w}I, t) = & \tilde{w}(r - q)(T - t) + \kappa \xi \int_t^T \beta_2(\tilde{w}I, \tau) d\tau + \\ & (a_U \eta_U + b_U \kappa \xi) \int_t^T \beta_3(\tilde{w}I, \tau) d\tau + \\ & (a_D \eta_D + b_D \kappa \xi) \int_t^T \beta_4(\tilde{w}I, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $\tau$  为被积的时间变量,  $\tau \in [t, T]$ 。最终

$$\begin{aligned} \Phi_Y(\tilde{w}, X_t, t) = & \exp\{\tilde{w}[(r - q)(T - t) + Y_t] + \\ & \kappa \xi \int_t^T \beta_2(\tilde{w}I, \tau) d\tau + \beta_2(\tilde{w}I, t) V_t + \\ & (a_U \eta_U + b_U \kappa \xi) \int_t^T \beta_3(\tilde{w}I, \tau) d\tau + \beta_3(\tilde{w}I, t) \lambda_{U,t} + \\ & (a_D \eta_D + b_D \kappa \xi) \int_t^T \beta_4(\tilde{w}I, \tau) d\tau + \beta_4(\tilde{w}I, t) \lambda_{D,t}\} \end{aligned} \quad (13)$$

### 2.3 广义傅里叶变换与期权价格的表达式

令  $C_t$  为欧式看涨期权在  $t$  时刻的价格,  $T$  为到期时刻,  $K$  为行权价格。在  $T$  时刻, 期权的价格为  $C_T = (S_T - K)^+ = (e^{Y_T} - K)^+$ , 上标  $+$  表示取括号内的数与 0 之间的最大值。令  $h(y)$  为在到期时刻标的资产对数价格为  $y$  时对应的期权价格, 则有  $h(y) = (e^y - K)^+$ 。令  $z$  为任意的一个复数,  $z = u + iv$ , 即  $z \in \mathbf{C}$ ,  $u$  为  $z$  的实部,  $v$  为  $z$  的虚部,  $i$  为虚数单位, 则有  $u \in \mathbf{R}$ ,  $v \in \mathbf{R}$ 。由于  $h(y)$  的广义傅里叶变换为  $\hat{h}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izy} h(y) dy = -\frac{K^{z+1}}{z^2 - iz}$ 。因此根据广义傅里叶逆变换原理, 可得

$$\begin{aligned} h(y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyz} \hat{h}(z) du \\ = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^{z+1} e^{-iyz}}{z^2 - iz} du, \forall v > 1 \end{aligned} \quad (14)$$

结合 (14) 式和风险中性定价原理可得

$$\begin{aligned} C_t = & e^{-r(T-t)} E[h(Y_T) | \mathcal{F}_t] \\ = & -\frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^{z+1} \Phi_Y(-iz, X_t, t)}{z^2 - iz} du, \forall v > 1 \end{aligned} \quad (15)$$

(14) 式和 (15) 式对任意  $v > 1$  均成立, 可利用留数

定理将 (15) 式中  $v$  的取值范围变为  $(0, 1)$ 。由于  $e^{-r(T-t)} \Phi_Y(1, X_t, t) = e^{-r(T-t)} E[S_T | \mathcal{F}_t] = S_t e^{-q(T-t)}$ , 因此对于 (15) 式, 其被积函数在  $z = i$  上的留数为  $\text{Res}(i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \left[ -\frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi} \cdot \frac{K^{z+1} \Phi_Y(-iz, X_t, t)}{z^2 - iz} \right] = \frac{i S_t e^{-q(T-t)}}{2\pi}$ ,  $\text{Res}$  表示留数。根据留数定理, 此时有

$$\begin{aligned} -S_t e^{-q(T-t)} = & 2\pi i \text{Res}(i) \\ = & -C_t - \frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^{z+1} \Phi_Y(-iz, X_t, t)}{z^2 - iz} du, \\ & \forall v \in (0, 1) \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 式对任意  $v \in (0, 1)$  均成立。令  $v = \frac{1}{2}$ , 并将  $z = u + \frac{1}{2}i$  代入 (16) 式后化简, 可得

$$\begin{aligned} C_t = & S_t e^{-q(T-t)} - \\ & \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re}[K^{\frac{1}{2}-iu} \Phi_Y(\frac{1}{2} + iu, X_t, t)]}{u^2 + \frac{1}{4}} du \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $\text{Re}$  为实部。令  $x = \frac{1}{2} + iu$ , 结合 (13) 式和 (17) 式, 可得欧式看涨期权价格为

$$C_t = S_t e^{-q(T-t)} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re}[\Gamma(x, X_t, t)] du \quad (18)$$

其中,  $\Gamma(\cdot)$  为函数,  $\Gamma(x, X_t, t)$  为  $\Gamma(x, X_t, t, T, \Theta)$  的简化记法, 满足

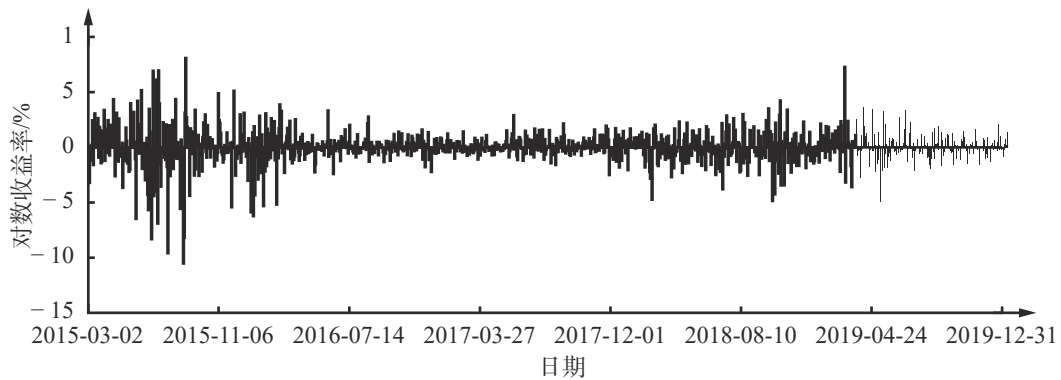
$$\begin{aligned} \Gamma(x, X_t, t) = & \frac{1}{x(1-x)} \exp\{x[Y_t - q(T-t)] + \\ & (1-x)[\log K - r(T-t)] + \beta_2(xI, t) V_t + \\ & \kappa \xi \int_t^T \beta_2(xI, \tau) d\tau + \beta_3(xI, t) \lambda_{U,t} + \\ & (a_U \eta_U + b_U \kappa \xi) \int_t^T \beta_3(xI, \tau) d\tau + \beta_4(xI, t) \lambda_{D,t} + \\ & (a_D \eta_D + b_D \kappa \xi) \int_t^T \beta_4(xI, \tau) d\tau \} \end{aligned} \quad (19)$$

与已有的期权定价模型相比, (18) 式是一个更加泛用的期权定价模型, 其在一定条件下可以退化为现有的一些期权定价模型。例如, 当  $b_U = b_D = \delta_U = \delta_D = 0$  时, (18) 式退化为 Hawkes 随机波动率跳扩散的期权定价模型; 当  $b_U = b_D = \theta_{UU} = \theta_{UD} = \theta_{DU} = \theta_{DD} = 0$  时, (18) 式退化为随机波动率联跳的期权定价模型; 当  $\delta_U = \delta_D = 0$ ,  $\varepsilon_{U,t} \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{D,t} \equiv 0$  时, (18) 式退化为 Heston 随机波动率的期权定价模型; 当  $\varepsilon_{U,t} \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{D,t} \equiv 0$  且  $V_t$  为大于 0 的常数时, (18) 式退化为经典的 B-S 期权定价模型。对于看跌期权价格  $P_t$ , 根据期权平价公式  $C_t + K e^{-r(T-t)} = P_t + S_t e^{-q(T-t)}$ , 不难得到  $P_t = C_t + K e^{-r(T-t)} - S_t e^{-q(T-t)}$ 。结合 (18) 式易得  $P_t$  的表达式, 此处不再赘述。

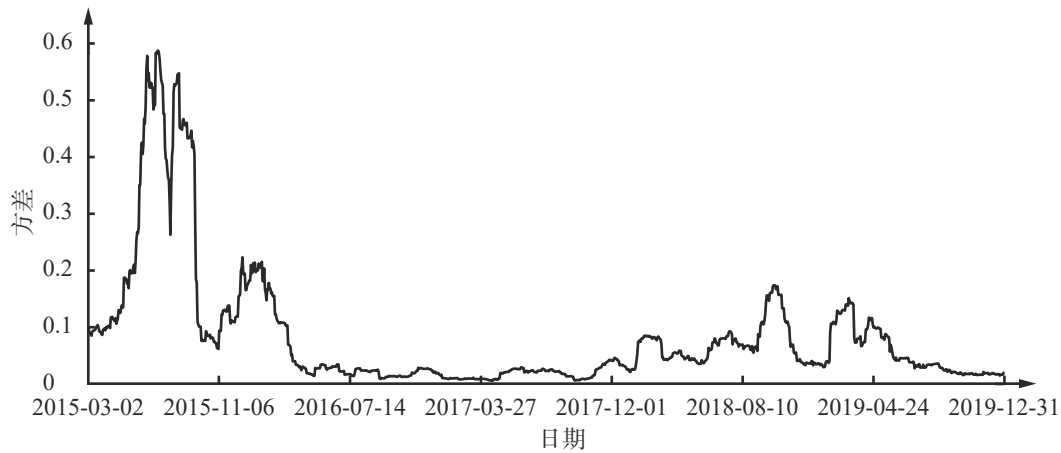
## 3 实证设计

### 3.1 数据的选取、处理和统计分析

本研究选取上证 50ETF 期权作为实证研究对象。2015 年 2 月 9 日上证 50ETF 期权在上海证券交易所上市交易, 是中国首支股票期权产品, 其诞生为中国股票期权定价研究提供了重要的研究对象。图 1 给出 2015 年 3 月 2 日至 2019 年 12 月 31 日上证 50ETF



(a) 对数收益



(b) 30日滚动窗口计算的年化方差

图1 上证50ETF对数收益率及30日滚动窗口的年化方差

Figure 1 Log-Returns of Shanghai 50ETF and Annualized Variances Calculated by 30 Days Rolling Windows

表1 上证50ETF对数收益率的基本统计量

Table 1 Basic Statistics for the Log-Returns of Shanghai 50ETF

	最大值	最小值	均值	标准差	偏度	峰度
2015年下半年	8.091%	-10.517%	-0.132%	0.027	-0.658	6.210
2019年下半年	2.277%	-2.132%	0.041%	0.008	0.079	3.362

对数收益率及其年化方差(以30日滚动窗口计算)的变化图,受股灾的影响,上证50ETF对数收益率在2015年下半年出现大幅波动,涨跌幅屡次突破5%,最大跌幅达到10%。若以对数收益率的绝对值超过5%作为资产价格发生跳跃的条件,可以看出图1中上证50ETF价格的跳跃主要集中在2015年下半年至2016年初,在时间上呈现出明显的聚集特征。由对数收益率年化方差变化可知,上证50ETF对数收益率的方差在2015年6月起出现上跳,在2015年10月前均处于非常高的水平。不难发现,上证50ETF价格的跳跃与方差之间存在一定的联系,当价格发生跳跃时,其方差也大幅上涨,并且在价格发生跳跃聚集期间维持在很高的水平。总而言之,上证50ETF的价格存在明显的跳跃聚集特点,并且在跳跃发生时其方差也出现大幅上跳。这为本研究提供了一定

的事实依据。

为了使模型能充分捕捉到上证50ETF的跳跃聚集以及跳跃与波动率之间的相互作用,本研究选取2015年7月至12月每周三(法定节假日除外)的上证50ETF看涨期权收盘价作为模型校准的样本数据,并用下一天(周四)的上证50ETF看涨期权收盘价样本评估模型的预测能力。选择周三的原因在于,与一周内的其他交易日相比,金融资产价格在周三受到的周内效应影响相对较小。为了考察模型在非股灾期间(平稳时期)的定价能力,本研究选择2019年7月至12月每周三的上证50ETF看涨期权收盘价数据作为另一个校准的样本,同样以周四的看涨期权收盘价样本考察模型的预测能力。最后,假定标的资产红利率为0,并选取1年期中债国债即期收益率作为无风险利率。国债收益率数据来自中国债券信息

表 2 上证 50ETF 期权的样本数量  
Table 2 Numbers of Shanghai 50ETF Option Samples

	$m \leq -0.100$	$-0.100 < m \leq 0$	$0 < m \leq 0.100$	$m > 0.100$	全部
2015年下半年					
$Dtm \leq 30$	63	91	90	43	287
$30 < Dtm \leq 60$	54	97	98	79	328
$60 < Dtm \leq 90$	41	35	37	50	163
$90 < Dtm \leq 120$	55	40	45	96	236
$120 < Dtm \leq 150$	33	31	41	65	170
$150 < Dtm \leq 180$	12	30	36	43	121
$Dtm > 180$	23	61	66	55	205
全部	281	385	413	431	1 510
	$m \leq -0.100$	$-0.100 < m \leq -0.050$	$-0.050 < m \leq 0$	$m > 0$	全部
2019年下半年					
$Dtm \leq 30$	77	76	73	49	275
$30 < Dtm \leq 60$	64	62	63	78	267
$60 < Dtm \leq 90$	57	19	20	32	128
$90 < Dtm \leq 120$	42	40	37	64	183
$120 < Dtm \leq 150$	31	22	20	43	116
$150 < Dtm \leq 180$	30	20	20	31	101
$Dtm > 180$	22	61	57	109	249
全部	323	300	290	406	1 319

网, 上证 50ETF 及对应的期权数据均来自同花顺数据库。表 1 给出 2015 年下半年和 2019 年下半年上证 50ETF 日对数收益率的基本统计量, 2015 年下半年的上证 50ETF 对数收益率具有左偏、尖峰厚尾特征, 且波动非常大, 最大涨幅和最大跌幅均超过 5%; 2019 年下半年的上证 50ETF 对数收益率则是略微右偏, 均值接近于 0, 峰度接近于 3, 最大涨幅和跌幅均不超过 2.5%, 总体分布近似于正态分布。由于这两个时间段分别代表金融市场的极端危机时期和常态时期, 若期权定价模型在这两个样本区间内均有良好的定价表现, 则表明该模型具有很好的泛用性。

在校准模型前, 本研究先对期权样本数据进行筛选。首先, 剔除期权价格缺失以及到期日小于 7 天的期权样本; 其次, 剔除没有随着行权价格增加而单调递减的期权价格, 保证校准得出的模型满足无套利条件; 最后, 分别剔除两个时期内期权价格从小到大排列后的前 10% 样本, 这部分样本大多数都是到期时间在一个月以内的深度虚值期权, 其价格几乎为 0, 因此予以排除。筛选后, 2015 年下半年的期权样本

数为 1 510 个, 2019 年下半年的期权样本数为 1 319 个。表 2 和表 3 分别给出两个样本时期内不同到期时间和价值状态对应的上证 50ETF 看涨期权的样本数量和平均价格,  $m$  为期权的价值状态,  $m = \log \frac{K}{S}$ ,  $Dtm$  为期权剩余到期时间。对于看涨期权,  $m < 0$  表示实值期权,  $m = 0$  表示平值期权,  $m > 0$  表示虚值期权。由表 2 可知, 半数以上的上证 50ETF 看涨期权到期时间都在 120 天以内, 到期时间在 60 天以内的期权数量最多。在 2015 年下半年, 虚值期权的数量要多于实值期权, 而在 2019 年下半年正好相反。由表 3 可知, 到期时间在 60 天 ~ 90 天和 150 天 ~ 180 天的期权价格平均比较高。在 2015 年下半年, 到期时间在 60 天以内的期权价格平均比较低; 在 2019 年下半年, 则是到期时间在 90 天 ~ 150 天或在 180 天以上的期权价格平均比较低。

### 3.2 基准模型、校准的目标函数和评价指标

在 DUFFIE et al.<sup>[32]</sup> 提出仿射跳扩散框架后, 已有的基于仿射跳扩散框架的新型期权定价模型主要包

表3 上证50ETF期权样本平均价格  
Table 3 Average Prices of Shanghai 50ETF Options Samples

	$m \leq -0.100$	$-0.100 < m \leq 0$	$0 < m \leq 0.100$	$m > 0.100$	全部
2015年下半年					
$Dtm \leq 30$	0.377	0.132	0.039	0.018	0.139
$30 < Dtm \leq 60$	0.369	0.171	0.081	0.027	0.142
$60 < Dtm \leq 90$	0.435	0.249	0.147	0.063	0.216
$90 < Dtm \leq 120$	0.420	0.208	0.112	0.039	0.170
$120 < Dtm \leq 150$	0.449	0.233	0.138	0.060	0.186
$150 < Dtm \leq 180$	0.380	0.325	0.242	0.157	0.246
$Dtm > 180$	0.384	0.277	0.192	0.099	0.214
全部	0.401	0.206	0.119	0.060	0.177
	$m \leq -0.100$	$-0.100 < m \leq -0.050$	$-0.050 < m \leq 0$	$m > 0$	全部
2019年下半年					
$Dtm \leq 30$	0.469	0.236	0.089	0.021	0.218
$30 < Dtm \leq 60$	0.446	0.211	0.108	0.030	0.190
$60 < Dtm \leq 90$	0.497	0.229	0.137	0.045	0.288
$90 < Dtm \leq 120$	0.388	0.238	0.140	0.040	0.183
$120 < Dtm \leq 150$	0.365	0.224	0.143	0.046	0.182
$150 < Dtm \leq 180$	0.402	0.267	0.184	0.078	0.233
$Dtm > 180$	0.375	0.276	0.190	0.078	0.178
全部	0.436	0.234	0.133	0.050	0.205

括 ERAKER et al.<sup>[33-34]</sup> 的随机波动率联跳模型和 KOK-HOLM<sup>[15]</sup> 的 Hawkes 随机波动率跳扩散模型。本研究通过实证研究, 比较本研究提出的自刺激跳跃与随机波动率交叉反馈模型 (包括 (1) 式 ~ (5) 式, 以下简称 CFSVSEJ 模型)、Hawkes 随机波动率跳扩散模型 (以下简称 SVHJ 模型) 和随机波动率联跳模型 (以下简称 SVCJ 模型) 对期权价格的拟合和预测能力。

在风险中性测度下, 上跳和下跳分离的 SVHJ 模型设定为

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sqrt{V_t}(\rho dW_{V,t} + \sqrt{1-\rho^2}dW_{Y,t}) + (e^{\varepsilon_{U,t}} - 1)dN_{U,t} + (e^{-\varepsilon_{D,t}} - 1)dN_{D,t} \\ dV_t = \kappa(\xi - V_t)dt + \varphi \sqrt{V_t}dW_{V,t} \\ d\lambda_{U,t} = \eta_U(\lambda_{U,\infty} - \lambda_{U,t})dt + \theta_{UU}\varepsilon_{U,t}dN_{U,t} + \theta_{UD}\varepsilon_{D,t}dN_{D,t} \\ d\lambda_{D,t} = \eta_D(\lambda_{D,\infty} - \lambda_{D,t})dt + \theta_{DU}\varepsilon_{U,t}dN_{U,t} + \theta_{DD}\varepsilon_{D,t}dN_{D,t} \end{cases} \quad (20)$$

其中,  $\mu_t = r - q - E(e^{\varepsilon_{U,t}} - 1)\lambda_{U,t} - E(e^{-\varepsilon_{D,t}} - 1)\lambda_{D,t}$ ,  $\lambda_{U,\infty}$ 、 $\lambda_{D,\infty}$ 、 $\eta_U$ 、 $\eta_D$ 、 $\theta_{UU}$ 、 $\theta_{UD}$ 、 $\theta_{DU}$ 和 $\theta_{DD}$ 均大于0。 $\varepsilon_{U,t}$ 服从参数为 $\gamma_U$ 的指数分布,  $\varepsilon_{D,t}$ 服从参数为 $\gamma_D$ 的指数分布。其余参数含义与前文相同。与 CFSVSEJ 模型相比, SVHJ 模型并未考虑波动率的跳跃, 也未把波动率对跳跃

强度的影响考虑进来。

在风险中性测度下, 上跳和下跳分离的 SVCJ 模型设定为

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \bar{\mu}dt + \sqrt{V_t}(\rho dW_{V,t} + \sqrt{1-\rho^2}dW_{Y,t}) + (e^{\varepsilon_{U,t}} - 1)dN_{U,t} + (e^{-\varepsilon_{D,t}} - 1)dN_{D,t} \\ dV_t = \kappa(\xi - V_t)dt + \varphi \sqrt{V_t}dW_{V,t} + \delta_U \varepsilon_{U,t}dN_{U,t} + \delta_D \varepsilon_{D,t}dN_{D,t} \end{cases} \quad (21)$$

其中,  $\bar{\mu} = r - q - E(e^{\varepsilon_{U,t}} - 1)\lambda_U - E(e^{-\varepsilon_{D,t}} - 1)\lambda_D$ ;  $N_{U,t}$ 和 $N_{D,t}$ 为 Poisson 过程,  $N_{U,t}$ 的强度为 $\lambda_U$ ,  $N_{D,t}$ 的强度为 $\lambda_D$ ;  $\varepsilon_{U,t}$ 和 $\varepsilon_{D,t}$ 的分布与 SVHJ 模型相同, 其余参数含义与前文相同。SVCJ 模型与 CFSVSEJ 模型主要区别在于强度过程的设定不同, SVCJ 模型中资产价格的跳跃强度往往是固定的, CFSVSEJ 模型中资产价格的跳跃强度是一个随机过程。

本研究校准模型采用的目标函数是误差平方和 (SSE), 定义为

$$SSE = \sum_{l=1}^n (C_{T_l, K_l}^M - C_{T_l, K_l}^R)^2 \quad (22)$$

其中,  $n$ 为样本个数,  $l$ 为样本序号,  $T_l$ 为第 $l$ 个期权样



本的剩余到期时间,  $K_l$  为第  $l$  个期权样本的行权价格,  $C_{T_l, K_l}^M$  为第  $l$  个期权样本通过模型计算得出的理论价格,  $C_{T_l, K_l}^R$  为第  $l$  个期权样本的现实市场价格。  $M$  代表模型,  $R$  代表现实市场, 模型校准以最小化 (22) 式中的误差平方和为目标。

模型校准效果的评价指标主要有平均绝对误差 (MAE)、平均相对误差 (MRE) 和均方根误差 (RMSE), 它们的定义分别为

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n |C_{T_l, K_l}^M - C_{T_l, K_l}^R| \quad (23)$$

$$MRE = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left| \frac{C_{T_l, K_l}^M - C_{T_l, K_l}^R}{C_{T_l, K_l}^R} \right| \quad (24)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (C_{T_l, K_l}^M - C_{T_l, K_l}^R)^2} \quad (25)$$

除用于评价模型校准效果, 本研究还采用 (23) 式、(24) 式和 (25) 式测量模型对期权市场价格的预测能力, 以及对期权隐含波动率的拟合和预测能力。

#### 4 实证结果分析

##### 4.1 模型参数校准以及期权价格的拟合和预测结果

本研究利用每周三的期权价格数据分别对 3 个模型的参数进行校准, 且每周的校准均为独立进行。表 4 分别给出 CFSVSEJ 模型、SVHJ 模型和 SVCJ 模型在两个不同样本时期的参数平均校准结果, 3 个模型中  $\rho$  均为负且接近 -1, 表明上证 50ETF 价格与波动率之间存在较强的反向变化关系, 即存在杠杆效应。当价格下降时, 上证 50ETF 的波动率增大, 当波动率增加时价格趋于下降, 表现出明显的负向的波动率反馈效应。  $\frac{1}{\gamma_D}$  大于  $\frac{1}{\gamma_U}$ , 表明上证 50ETF 下跳的平均幅度大于上跳的平均幅度。在 CFSVSEJ 模型和 SVCJ 模

表 4 3 个模型的参数校准结果

Table 4 Calibration Results of Parameters for Three Models

CFSVSEJ 模型			SVHJ 模型			SVCJ 模型		
参数	2015 年 下半年	2019 年 下半年	参数	2015 年 下半年	2019 年 下半年	参数	2015 年 下半年	2019 年 下半年
$\rho$	-0.924	-0.863	$\rho$	-0.890	-0.849	$\rho$	-0.905	-0.733
$\xi$	0.119	0.013	$\xi$	0.105	0.014	$\xi$	0.099	0.011
$\varphi$	0.527	0.134	$\varphi$	0.707	0.279	$\varphi$	0.442	0.091
$\kappa$	2.213	1.387	$\kappa$	4.336	5.125	$\kappa$	1.891	1.792
$\gamma_U$	15.053	14.583	$\gamma_U$	14.686	14.231	$\gamma_U$	16.539	17.211
$\gamma_D$	10.190	9.534	$\gamma_D$	11.443	9.300	$\gamma_D$	10.294	12.131
$V_0$	0.101	0.016	$V_0$	0.089	0.014	$V_0$	0.084	0.010
$\delta_U$	0.126	0.089	$\lambda_{U, \infty}$	0.519	0.238	$\delta_U$	0.454	0.487
$\delta_D$	0.204	0.178	$\lambda_{D, \infty}$	0.543	0.277	$\delta_D$	0.561	0.507
$\lambda_{U, 0}$	0.119	0.096	$\lambda_{U, 0}$	0.137	0.079	$\lambda_U$	0.619	0.526
$\lambda_{D, 0}$	0.278	0.192	$\lambda_{D, 0}$	0.271	0.149	$\lambda_D$	0.725	0.600
$\eta_U$	3.934	5.642	$\eta_U$	4.701	4.655			
$\eta_D$	4.686	4.521	$\eta_D$	5.174	4.754			
$\theta_{UU}$	4.257	3.063	$\theta_{UU}$	3.851	3.164			
$\theta_{UD}$	1.781	1.407	$\theta_{UD}$	1.920	1.174			
$\theta_{DU}$	1.905	1.246	$\theta_{DU}$	1.872	1.285			
$\theta_{DD}$	3.944	3.130	$\theta_{DD}$	3.856	2.449			
$a_U$	0.155	0.078						
$a_D$	0.193	0.129						
$b_U$	1.088	0.779						
$b_D$	1.197	0.716						

型中,  $\frac{\delta_D}{\gamma_D}$  大于  $\frac{\delta_U}{\gamma_U}$ , 表明上证 50ETF 价格中不同方向的跳跃对波动率有非对称影响, 下跳对波动率的平均影响强于上跳对波动率的平均影响。

由 CFSVSEJ 模型和 SVHJ 模型中代表跳跃刺激的系数可知,  $\theta_{UU}$  大于  $\theta_{UD}$ ,  $\theta_{DD}$  大于  $\theta_{DU}$ , 表明对于上证 50ETF 的价格, 无论是上跳还是下跳, 自我刺激都强于交叉刺激。另外,  $\theta_{UU}$  大于  $\theta_{DU}$ ,  $\theta_{DD}$  大于  $\theta_{UD}$ , 意味着当上证 50ETF 价格发生上跳事件时, 之后更趋向于再次发生上跳事件而不是下跳事件; 当上证 50ETF 价格发生下跳事件时, 之后更趋向于再次发生下跳事件而不是上跳事件。这也说明上证 50ETF 的价格不仅在跳跃上存在聚集性, 在跳跃方向上也存在一定的聚集性, 即上跳聚集和下跳聚集。

在 CFSVSEJ 模型中,  $b_D$  大于  $b_U$ , 表明上证 50ETF 波动率对其价格中不同方向跳跃的强度产生非对称影响, 波动率对下跳强度的影响强于对上跳强度的影响, 即当上证 50ETF 波动率增大时, 价格发生下跳的概率高于价格发生上跳的概率。 $a_D$  大于  $a_U$ , 表明上证 50ETF 价格下跳的基础强度大于上跳的基础强度, 意味着当不考虑跳跃刺激以及波动率对跳跃强度的影响时, 上证 50ETF 价格发生下跳的概率高于发生上跳的概率。SVHJ 模型中  $\lambda_{D,\infty}$  大于  $\lambda_{U,\infty}$ 、SVCJ 模型中  $\lambda_D$  大于  $\lambda_U$  也反映了这一点。

总的看, 上证 50ETF 价格的跳跃存在自刺激特征, 且波动率与跳跃之间存在非对称的交叉反馈作用, 下跳对波动率的影响大于上跳, 波动率对下跳强度的影响大于对上跳强度的影响。在股灾期间, 自刺激与非对称交叉反馈作用的存在使上证 50ETF 价格更容易出现跳跃聚集, 并且最终导致股价暴跌。具体而言, 当股价发生下跳时, 一方面, 在自刺激作用

下, 股价的跳跃强度随之增大; 另一方面, 交叉反馈作用使股价的波动率大幅上升, 波动率的上升又导致股价的跳跃强度进一步增大, 从而使股价更容易继续发生上跳或下跳。由于非对称性的存在, 股价下跳强度增加的幅度远远大于上跳强度增加的幅度, 因此在接下来的一段时间内股价出现下跳的次数更多; 而新的下跳又通过自刺激与非对称交叉反馈作用进一步增大股价的下跳强度, 最终形成恶性循环, 导致股市崩盘。

表 5 给出 3 个模型在两个样本时期内期权价格拟合的平均绝对误差、平均相对误差和均方根误差, 无论是股灾时期还是非股灾时期, CFSVSEJ 模型拟合期权价格的平均绝对误差、平均相对误差和均方根误差在 3 个模型中均最小, 表明与 SVHJ 模型和 SVCJ 模型相比, CFSVSEJ 模型在拟合期权价格上表现最好。具体看, 在股灾时期, CFSVSEJ 模型在拟合期权价格上相对优势更明显, 平均绝对误差比 SVHJ 模型少 26.667%、比 SVCJ 模型少 15.385%, 平均相对误差比 SVHJ 模型少 10.791%、比 SVCJ 模型少 7.794%, 均方根误差比 SVHJ 模型少 30%、比 SVCJ 模型少 8.696%; 在非股灾期间, CFSVSEJ 模型的拟合表现依旧比 SVHJ 模型好, 但与 SVCJ 模型相比差别不大。总的看, CFSVSEJ 模型比其他两个基准模型能更好地刻画股灾期间期权价格的变化, 且在非股灾期间的表现也不弱于其他两个模型。因此, CFSVSEJ 模型在期权定价上具有良好的泛用性。

本研究考察 3 个模型样本外的期权价格预测能力。表 6 给出 3 个模型在两个样本时期内期权价格预测的平均绝对误差、平均相对误差和均方根误差, 无论是股灾时期还是非股灾时期, CFSVSEJ 模型预

表 5 3 个模型拟合的平均误差

Table 5 Average Fitting Errors under Three Models

误差指标	CFSVSEJ 模型		SVHJ 模型		SVCJ 模型	
	2015年下半年	2019年下半年	2015年下半年	2019年下半年	2015年下半年	2019年下半年
平均绝对误差	0.011	0.013	0.015	0.014	0.013	0.013
平均相对误差/%	9.772	9.698	10.954	10.771	10.598	9.854
均方根误差	0.021	0.019	0.030	0.020	0.023	0.020

表 6 3 个模型预测的平均误差

Table 6 Average Prediction Errors under Three Models

误差指标	CFSVSEJ 模型		SVHJ 模型		SVCJ 模型	
	2015年下半年	2019年下半年	2015年下半年	2019年下半年	2015年下半年	2019年下半年
平均绝对误差	0.013	0.013	0.016	0.014	0.014	0.014
平均相对误差/%	11.485	9.551	12.261	10.826	11.736	10.658
均方根误差	0.021	0.020	0.029	0.021	0.023	0.021

测的平均绝对误差、平均相对误差和均方根误差在3个模型中均最小,表明CFSVSEJ模型在期权价格预测上比其他两个模型表现更好。具体看,在股灾期间,CFSVSEJ模型预测的平均绝对误差比SVHJ模型少18.750%、比SVCJ模型少7.143%,均方根误差比SVHJ模型少27.586%、比SVCJ模型少8.696%,但在平均相对误差上的优势相对不明显;在非股灾期间,CFSVSEJ模型预测的平均相对误差比SVHJ模型少11.777%、比SVCJ模型少10.387%,但在平均绝对误差和均方根误差上的优势相对不明显。总的看,CFSVSEJ模型比SVHJ模型和SVCJ模型有更强的期权价格预测能力。

表7和表8分别给出3个模型在两个样本时期内不同价值状态和到期时间下期权价格预测的平均绝对误差和平均相对误差水平。与虚值期权相比,实值或平值期权价格的平均绝对预测误差更大,平均相对预测误差更小。从到期时间上看,到期时间小于60天或大于180天的期权的平均绝对预测误差最小,且到期时间大于180天的期权的平均相对预测误差同样最小。在股灾期间,期权到期时间越长,模型预测的平均相对误差往往越小,但在非股灾期间不存在这一规律。到期时间在60天至180天的实值或平值期权的平均绝对预测误差最大,在绝大多数情况下到期日大于180天的虚值期权的平均绝对预测误差最小,到期时间在180天以上的实值期权的平均

相对预测误差最小,到期时间在60天以内的虚值期权的平均相对预测误差最大。

对比3个模型可知,除了在非股灾期间SVCJ模型预测虚值期权价格的平均绝对误差更小,其余情况下,无论是对于实值、平值还是虚值期权,CFSVSEJ模型在股灾和非股灾期间的预测表现比起其他两个模型均更优。从到期时间上看,在股灾期间,对于到期时间小于120天的期权,CFSVSEJ模型和SVCJ模型在预测表现上差别不大,但均比SVHJ模型的预测表现更好;对于到期时间大于120天的期权,CFSVSEJ模型的预测表现最好。在非股灾期间,对于到期时间在60天至120天的期权,SVCJ模型的平均绝对预测误差和平均相对预测误差均为最小;对于其他到期时间的期权,CFSVSEJ模型表现出更好的预测能力。

#### 4.2 隐含波动率的拟合和预测结果

本研究考察3个模型在拟合和预测隐含波动率上的表现,由于模型的校准以最小化定价误差平方和为目标,因此将校准得到的参数用于拟合隐含波动率时往往不一定能够达到最小拟合误差。本研究分别考察3个模型在每周三拟合隐含波动率的平均误差,最终选择2015年12月9日和2019年12月4日作为研究的时间点。与各自样本期间的其他时间点相比,在这两个时间点3个模型对期权隐含波动率的平均拟合误差都相对较小,同时这两个时点的期

表7 3个模型预测的子样本平均绝对误差  
Table 7 Average Absolute Prediction Errors for the Sub-samples under Three Models

	CFSVSEJ模型			SVHJ模型			SVCJ模型		
	$m \leq 0$	$m > 0$	全部	$m \leq 0$	$m > 0$	全部	$m \leq 0$	$m > 0$	全部
2015年下半年									
$Dtm \leq 60$	0.013	0.010	0.012	0.014	0.011	0.012	0.014	0.010	0.012
$60 < Dtm \leq 120$	0.022	0.010	0.015	0.026	0.013	0.019	0.023	0.010	0.016
$120 < Dtm \leq 180$	0.018	0.014	0.015	0.027	0.020	0.022	0.022	0.013	0.017
$Dtm > 180$	0.013	0.009	0.011	0.013	0.009	0.011	0.015	0.011	0.012
全部	0.016	0.011	0.013	0.019	0.013	0.016	0.018	0.011	0.014
2019年下半年									
$Dtm \leq 60$	0.010	0.006	0.009	0.011	0.007	0.010	0.011	0.006	0.010
$60 < Dtm \leq 120$	0.021	0.008	0.017	0.022	0.009	0.018	0.019	0.005	0.015
$120 < Dtm \leq 180$	0.027	0.010	0.021	0.028	0.011	0.022	0.032	0.007	0.023
$Dtm > 180$	0.012	0.006	0.010	0.013	0.007	0.011	0.016	0.008	0.012
全部	0.016	0.007	0.013	0.017	0.008	0.014	0.017	0.006	0.014

表 8 3 个模型预测的子样本平均相对误差  
Table 8 Average Relative Prediction Errors for the Sub-samples under Three Models

	CFSVSEJ 模型			SVHJ 模型			SVCJ 模型		
	$m \leq 0$	$m > 0$	全部	$m \leq 0$	$m > 0$	全部	$m \leq 0$	$m > 0$	全部
2015 年下半年									
$Dtm \leq 60$	6.107	24.141	14.888	6.151	24.276	14.976	6.279	23.845	14.832
$60 < Dtm \leq 120$	6.160	13.576	10.292	6.968	16.239	12.134	6.272	13.462	10.278
$120 < Dtm \leq 180$	4.907	12.797	9.842	6.570	13.768	11.072	5.689	13.240	10.412
$Dtm > 180$	4.421	7.225	6.035	4.570	7.260	6.118	5.060	8.883	7.261
全部	5.717	16.313	11.485	6.229	17.308	12.261	6.029	16.511	11.736
2019 年下半年									
$Dtm \leq 60$	5.571	23.660	9.602	6.425	29.339	11.531	6.244	25.813	10.605
$60 < Dtm \leq 120$	7.518	19.908	11.303	7.972	20.976	11.945	7.135	15.412	9.663
$120 < Dtm \leq 180$	9.485	13.690	10.900	9.678	16.740	12.053	11.353	19.443	14.075
$Dtm > 180$	4.394	8.304	6.074	4.917	9.352	6.823	6.004	13.070	9.040
全部	6.455	16.773	9.551	7.062	19.610	10.826	7.212	18.700	10.658

注:表中数据均为百分数。

权也有足够多不同的执行价格和到期时间,便于进行分类研究。

图 2 和图 3 分别给出 2015 年 12 月 9 日和 2019 年 12 月 4 日 3 个模型拟合期权隐含波动率的结果。由图 2 可知,对于 2015 年 12 月 9 日到期期限为 14 天的期权, SVCJ 模型的拟合有明显偏差, CFSVSEJ 模型和 SVHJ 模型的拟合相对更好;对于到期时间为 49 天的期权, SVCJ 模型的拟合相对最好, CFSVSEJ 模型和 SVHJ 模型存在一定的拟合偏差,但 3 个模型拟合曲线的形态基本一致;对于到期期限为 105 天和 196 天的期权, 3 个模型均能较好地拟合隐含波动率,彼此间差异非常小。总的看,对于到期时间大于 60 天的期权, 3 个模型在拟合隐含波动率上没有明显差异;但对于到期时间小于 60 天的期权, 3 个模型各有优劣。考虑到 SVCJ 模型在拟合到期时间 30 天以内的期权的隐含波动率时有更大的偏差,因此整体而言, CFSVSEJ 模型和 SVHJ 模型对于 2015 年 12 月 9 日的期权隐含波动率的拟合表现相对更好。

由图 3 可知, 2019 年 12 月 4 日只有到期时间为 21 天的期权的隐含波动率曲线向右下倾斜,且 SVCJ 模型拟合该期权的隐含波动率的效果最好。但是,对于到期时间为 49 天、112 天和 203 天的期权, CFSVSEJ 模型对隐含波动率的拟合要明显优于 SVHJ 模

型和 SVCJ 模型。因此,对于 2019 年 12 月 4 日的期权, CFSVSEJ 模型虽然在拟合短期期权的隐含波动率上有所偏差,但从整体上看其对隐含波动率曲线的拟合与 SVHJ 模型和 SVCJ 模型相比仍是最优的。

图 4 和图 5 分别给出 2015 年 12 月 10 日和 2019 年 12 月 5 日 3 个模型预测期权隐含波动率的结果,除 2015 年 12 月 10 日到期时间为 48 天的期权、2019 年 12 月 5 日到期时间为 20 天的期权, CFSVSEJ 模型对期权隐含波动率的预测都更准确。因此,整体而言, CFSVSEJ 模型在期权隐含波动率的预测上比 SVHJ 模型和 SVCJ 模型依然表现更好。

## 5 结论

考虑到金融市场中资产价格的跳跃聚集、波动率跳跃以及波动率与跳跃的交互作用,本研究基于仿射跳扩散框架,构建同时囊括上述 3 个特征的自刺激跳跃与波动率交叉反馈模型,利用风险中性定价方法、广义傅里叶变换和条件特征函数,得到该模型的欧式期权价格的半解析表达式。利用该模型对上证 50ETF 价格的跳跃、波动以及两者之间的交互作用特征进行研究,并探讨模型对上证 50ETF 期权的定价能力,以及对隐含波动率的拟合和预测能力。

研究结果表明,首先,上证 50ETF 价格具有明显

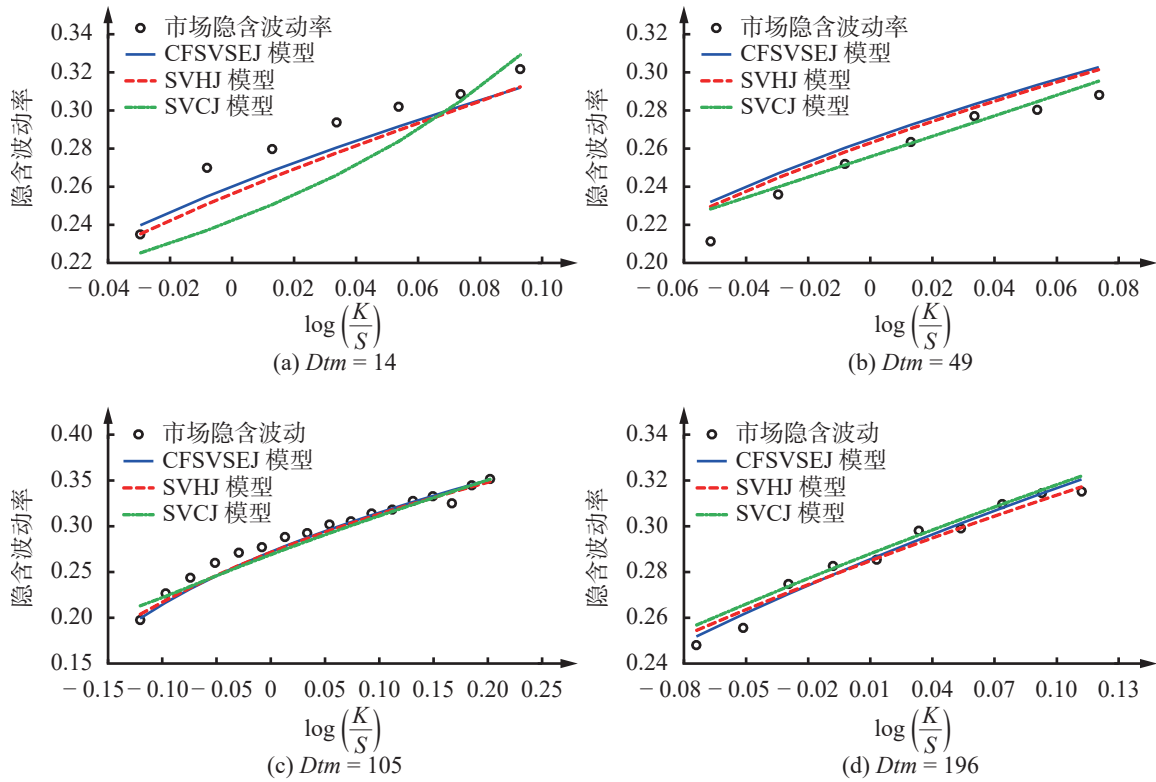


图 2 不同模型对 2015 年 12 月 9 日期权隐含波动率的拟合曲线

Figure 2 Fitting Curves for Option Implied Volatilities in Dec 9, 2015 under Different Models

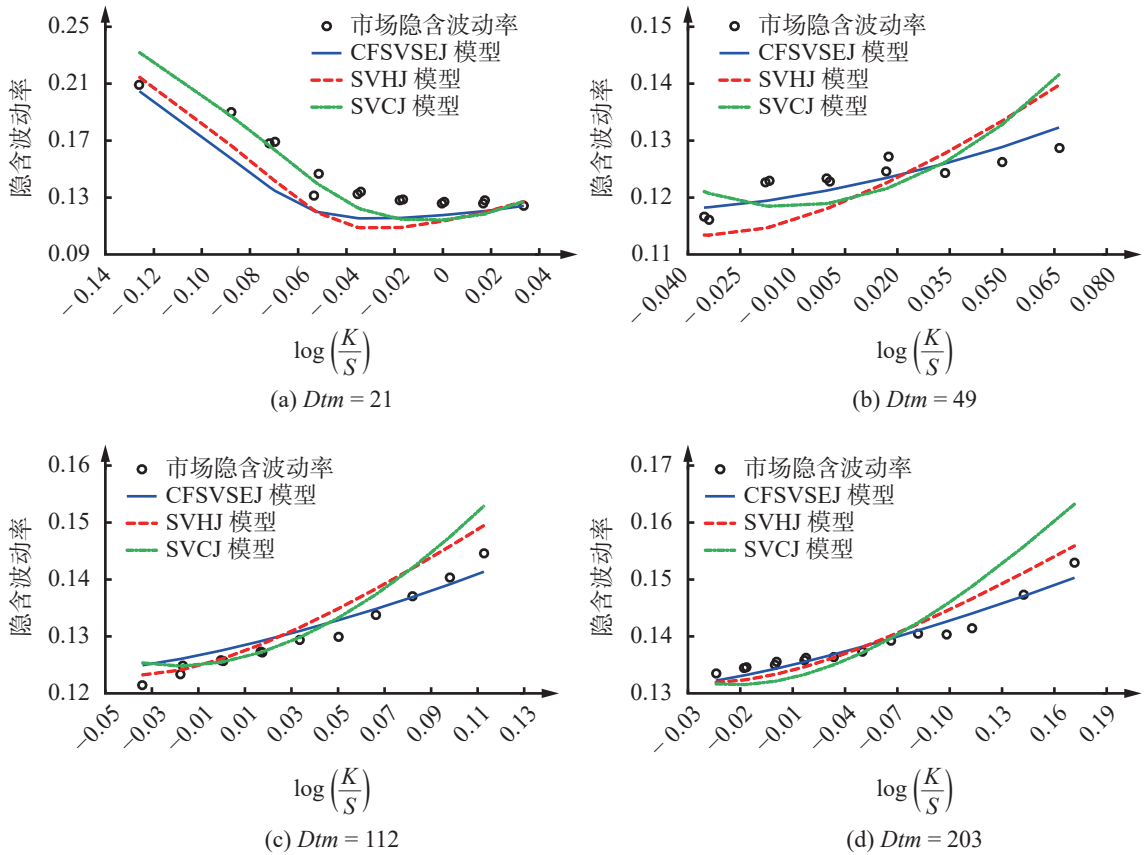


图 3 不同模型对 2019 年 12 月 4 日期权隐含波动率的拟合曲线

Figure 3 Fitting Curves for Option Implied Volatilities in Dec 4, 2019 under Different Models

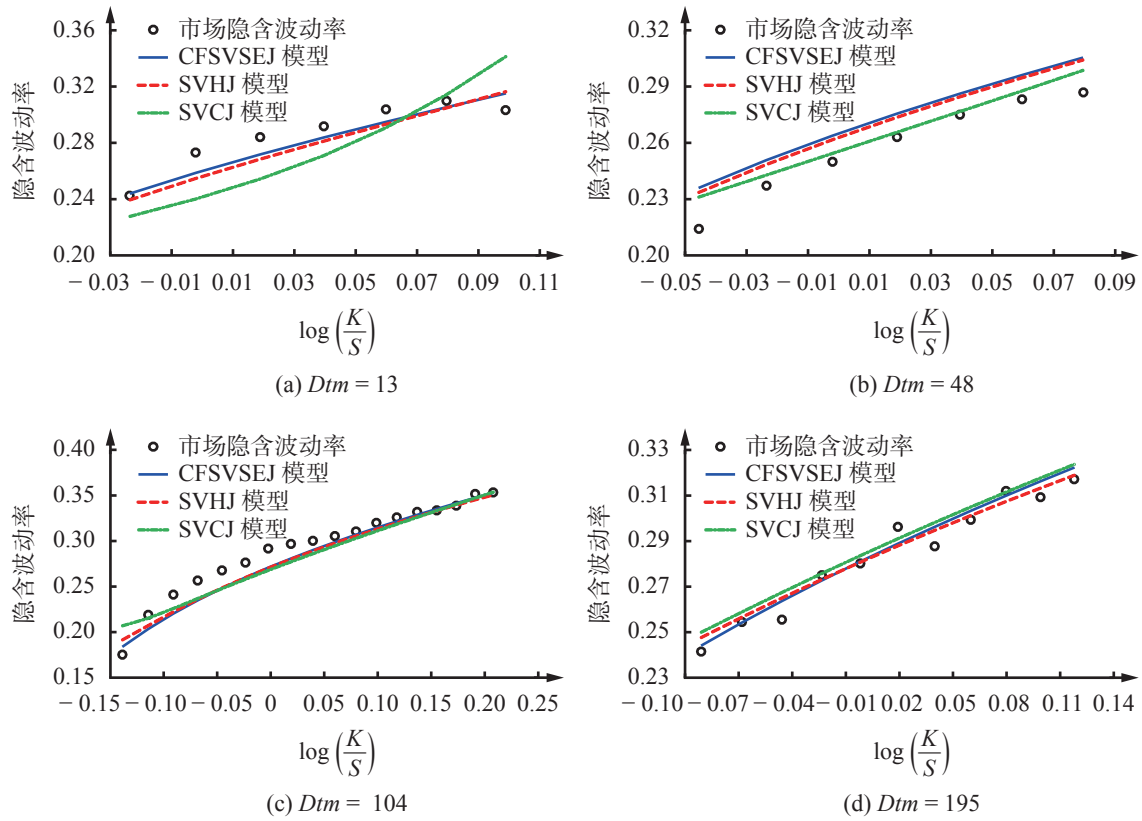


图4 不同模型对2015年12月10日期权隐含波动率的预测曲线

Figure 4 Prediction Curves for Option Implied Volatilities in Dec 10, 2015 under Different Models

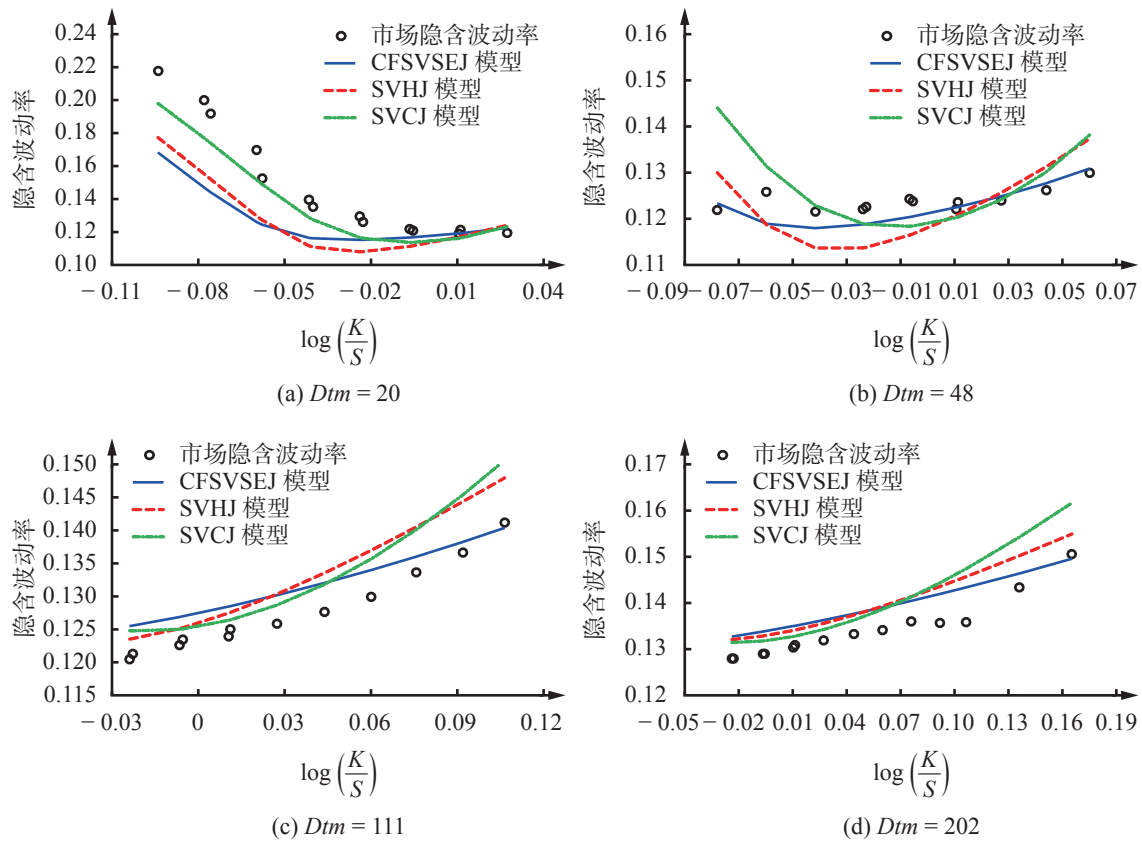


图5 不同模型对2019年12月5日期权隐含波动率的预测曲线

Figure 5 Prediction Curves for Option Implied Volatilities in Dec 5, 2019 under Different Models

的杠杆效应和负向的波动率反馈效应;其次,上证50ETF价格的下跳强度大于上跳强度,下跳的平均幅度也大于上跳的平均幅度;再次,上证50ETF的价格不仅存在跳跃聚集,还具有一定的上跳聚集和下跳聚集特征,且上跳和下跳的自我刺激均大于交叉刺激;最后,上证50ETF价格的波动率与跳跃之间存在非对称的交叉反馈作用,上证50ETF价格的下跳更容易导致大波动的产生,价格的大波动反过来又更容易导致价格下跳的发生,从而形成恶性循环,最终导致价格暴跌。

通过与Hawkes随机波动率跳扩散模型和随机波动率联跳模型的对比分析发现,自刺激跳跃与波动率交叉反馈模型对上证50ETF看涨期权价格的拟合和预测误差均最小,表明该模型对期权价格的拟合能力和预测能力优于已有模型。整体而言,该模型能更准确地拟合和预测期权隐含波动率曲线,比其他模型具有更高的实用价值。

总的看,标的资产的跳跃聚集特征、波动率的跳跃特征、以及波动率与跳跃之间的非对称交叉反馈作用在期权定价中扮演重要的角色,投资者在进行期权定价分析时应将这些特征考虑在内,忽略这些特征的影响将导致较大的期权定价误差和隐含波动率拟合偏差。在股灾期间,跳跃与波动的交叉反馈机制是导致股价暴跌的重要因素之一。因此,投资者在进行风险对冲时,需要对资产价格跳跃与波动之间的关联性有足够的重视,从而避免由跳跃与波动的交互作用导致的额外损失。由于本研究模型仅考虑单一资产价格的跳跃与波动之间的关系,因此并不能刻画市场中不同资产之间的波动溢出、跳跃传染以及波动与跳跃之间可能存在的跨资产的相互作用,这些将有待后续的进一步研究。

#### 参考文献:

- [1] HESTON S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 1993, 6(2): 327–343.
- [2] CARR P, WU L R. Time-changed Lévy processes and option pricing. *Journal of Financial Economics*, 2004, 71(1): 113–141.
- [3] KOU S G, WANG H. Option pricing under a double exponential jump diffusion model. *Management Science*, 2004, 50(9): 1178–1192.
- [4] CHRISTOFFERSEN P, JACOBS K, ORNTHANALAI C. Dynamic jump intensities and risk premiums: evidence from S&P500 returns and options. *Journal of Financial Economics*, 2012, 106(3): 447–472.
- [5] AÏT-SAHALIA Y, CACHO-DIAZ J, LAEVEN R J A. Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes. *Journal of Financial Economics*, 2015, 117(3): 585–606.
- [6] 陈国进, 王占海. 我国股票市场连续性波动与跳跃性波动实证研究. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(9): 1554–1562.  
CHEN Guojin, WANG Zhanhai. Continuous volatility and jump volatility in China's stock market. *Systems Engineering - Theory & Practice*, 2010, 30(9): 1554–1562.
- [7] 马勇, 张卫国, 闫杜娟. 中国股市暴涨暴跌的交互作用及其预测. *系统管理学报*, 2014, 23(5): 755–760.  
MA Yong, ZHANG Weiguang, YAN Dujuan. The interaction between large rises and large declines in China's stock market and its prediction. *Journal of Systems & Management*, 2014, 23(5): 755–760.
- [8] HAWKES A G. Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*, 1971, 58(1): 83–90.
- [9] 瞿慧, 纪萍. 引入联跳的中国股市协方差预测: 基于多元HAR模型. *管理科学*, 2016, 29(6): 28–38.  
QU Hui, JI Ping. The role of cojumps in forecasting covariance matrices in Chinese stock markets: a study based on the multivariate HAR model. *Journal of Management Science*, 2016, 29(6): 28–38.
- [10] 刘志东, 郑雪飞. 基于Hawkes因子模型的股价共同跳跃研究. *中国管理科学*, 2018, 26(7): 18–31.  
LIU Zhidong, ZHENG Xuefei. A study of stock price co-jumps with Hawkes factor model. *Chinese Journal of Management Science*, 2018, 26(7): 18–31.
- [11] 汪冬华, 张裕恒. 基于Hawkes过程中美股市大幅波动互激效应的研究. *中国管理科学*, 2018, 26(7): 32–39.  
WANG Donghua, ZHANG Yuheng. Research on large volatility mutually exciting effect of Chinese and American stock markets based on Hawkes process. *Chinese Journal of Management Science*, 2018, 26(7): 32–39.
- [12] 陈淼鑫, 徐亮. 基于Hawkes过程的尾部风险溢酬分析. *管理科学学报*, 2019, 22(6): 97–112.  
CHEN Miaoxin, XU Liang. Tail risk premium analysis based on Hawkes process. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(6): 97–112.
- [13] LIU W Y, ZHU S P. Pricing variance swaps under the Hawkes jump-diffusion process. *Journal of Futures Markets*, 2019, 39(6): 635–655.
- [14] ZEITSCH P J. A jump model for credit default swaps with hierarchical clustering. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, 524: 737–775.
- [15] KOKHOLM T. Pricing and hedging of derivatives in contagious markets. *Journal of Banking and Finance*, 2016, 66: 19–34.
- [16] JING B, LI S H, MA Y. Pricing VIX options with volatility clustering. *Journal of Futures Markets*, 2020, 40(6): 928–944.
- [17] JING B, LI S H, MA Y. Consistent pricing of VIX options with the Hawkes jump-diffusion model. *North American Journal of Economics and Finance*, 2021, 56: 101326-1–101326-13.
- [18] 马勇, 贺甄, 徐维东. 跳自刺激效应下的VIX期权定价研究. *管理工程学报*, 2021, 35(2): 243–248.  
MA Yong, HE Zhen, XU Weidong. The valuation of VIX options with self-exciting jumps. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2021, 35(2): 243–248.
- [19] MA Y, SHRESTHA K, XU W D. Pricing vulnerable options with jump clustering. *Journal of Futures Markets*, 2017, 37(12): 1155–1178.
- [20] MA Y, PAN D T, WANG T Y. Exchange options under clustered jump dynamics. *Quantitative Finance*, 2020, 20(6): 949–967.
- [21] PASRICHA P, GOEL A. Pricing power exchange options with Hawkes jump diffusion processes. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2021, 17(1): 133–149.

- [22] MA Y, PAN D T, SHRESTHA K, et al. Pricing and hedging foreign equity options under Hawkes jump-diffusion processes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2020, 537: 122645-1-122645-18.
- [23] BRIGNONE R, SGARRA C. Asian options pricing in Hawkes-type jump-diffusion models. *Annals of Finance*, 2020, 16(1): 101-119.
- [24] ZHANG X, XIONG J, SHEN Y. Bond and option pricing for interest rate model with clustering effects. *Quantitative Finance*, 2018, 18(6): 969-981.
- [25] PASRICHA P, GOEL A. Pricing vulnerable power exchange options in an intensity based framework. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, 355: 106-115.
- [26] BROADIE M, CHERNOV M, JOHANNES M. Model specification and risk premia: evidence from futures options. *The Journal of Finance*, 2007, 62(3): 1453-1490.
- [27] TODOROV V, TAUCHEN G. Volatility jumps. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2011, 29(3): 356-371.
- [28] FULOP A, LI J Y, YU J. Self-exciting jumps, learning, and asset pricing implications. *The Review of Financial Studies*, 2015, 28(3): 876-912.
- [29] 王春峰, 姚宁, 房振明, 等. 中国股市已实现波动率的跳跃行为研究. *系统工程*, 2008, 26(2): 1-6.  
WANG Chunfeng, YAO Ning, FANG Zhenming, et al. An empirical research on jump behavior of realized volatility in Chinese stock markets. *Systems Engineering*, 2008, 26(2): 1-6.
- [30] 杨科, 陈浪南. 基于C-TMPV的中国股市高频波动率的跳跃行为研究. *管理科学*, 2011, 24(2): 103-112.  
YANG Ke, CHEN Langnan. Empirical research on jump behavior of high-frequency volatility based on C-TMPV in Chinese stock markets. *Journal of Management Science*, 2011, 24(2): 103-112.
- [31] 吴恒煜, 朱福敏, 温金明. 带杠杆效应的无穷纯跳跃Lévy过程期权定价. *管理科学学报*, 2014, 17(8): 74-94.  
WU Hengyu, ZHU Fumin, WEN Jinming. Option pricing based on conditional infinite pure jump Lévy processes with leverage effect. *Journal of Management Sciences in China*, 2014, 17(8): 74-94.
- [32] DUFFIE D, PAN J, SINGLETON K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 2000, 68(6): 1343-1376.
- [33] ERAKER B, JOHANNES M, POLSON N. The impact of jumps in volatility and returns. *The Journal of Finance*, 2003, 58(3): 1269-1300.
- [34] ERAKER B. Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices. *The Journal of Finance*, 2004, 59(3): 1367-1403.
- [35] 宫晓莉, 熊熊, 庄新田. 广义双指数分布的跳跃扩散模型下股指期货波动研究. *管理科学*, 2018, 31(3): 149-159.  
GONG Xiaoli, XIONG Xiong, ZHUANG Xintian. Research on stock index futures volatility under generalized double exponential distribution jump diffusion model. *Journal of Management Science*, 2018, 31(3): 149-159.
- [36] PACATI C, POMPA G, RENÒ R. Smiling twice: the Heston ++ model. *Journal of Banking and Finance*, 2018, 96: 185-206.
- [37] LO C L, SHIH P T, WANG Y H, et al. VIX derivatives: valuation models and empirical evidence. *Pacific-Basin Finance Journal*, 2019, 53: 1-21.
- [38] HAN X Y. Valuation of vulnerable options under the double exponential jump model with stochastic volatility. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2019, 33(1): 81-104.
- [39] HOU A J, WANG W N, CHEN C Y H, et al. Pricing cryptocurrency options. *Journal of Financial Econometrics*, 2020, 18(2): 250-279.
- [40] 奚欢, 邓国和. 双跳跃仿射扩散模型的几何平均型水平重置期权定价. *系统科学与数学*, 2021, 41(1): 59-74.  
XI Huan, DENG Guohe. Pricing geometric average trigger reset option with predetermined levels in an affine diffusion model with double jumps. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2021, 41(1): 59-74.
- [41] 宫晓莉, 庄新田. 调和稳定Lévy过程驱动的双重跳跃模型及期权应用. *系统管理学报*, 2017, 26(6): 1089-1096.  
GONG Xiaoli, ZHUANG Xintian. Option pricing of a double jump model driven by tempered stable Lévy processes and its application. *Journal of Systems & Management*, 2017, 26(6): 1089-1096.
- [42] DAAL E, NAKA A, YU J S. Volatility clustering, leverage effects, and jump dynamics in the US and emerging Asian equity markets. *Journal of Banking and Finance*, 2007, 31(9): 2751-2769.
- [43] 陈浪南, 孙坚强. 股票市场资产收益的跳跃行为研究. *经济研究*, 2010, 45(4): 54-66.  
CHEN Langnan, SUN Jianqiang. Jump dynamics in stock returns. *Economic Research Journal*, 2010, 45(4): 54-66.
- [44] 朱福敏, 郑尊信, 吴恒煜. 跳跃自激发与非对称交叉反馈机制下的期权定价研究. *系统工程理论与实践*, 2018, 38(1): 1-15.  
ZHU Fumin, ZHENG Zunxin, WU Hengyu. Option pricing for the dynamics of jump-diffusion model with jump self-exciting and asymmetric cross-feedback. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2018, 38(1): 1-15.
- [45] DU D, LUO D. The pricing of jump propagation: evidence from spot and options markets. *Management Science*, 2019, 65(5): 2360-2387.



## Option Pricing with Cross-feedback between Self-exciting Jumps and Stochastic Volatility

PAN Dongtao, MA Yong

College of Finance and Statistics, Hunan University, Changsha 410006, China

**Abstract:** Modeling the asset price reasonably is always one of the core aspects of option pricing, and volatility and jumps are important factors in asset price models to be taken into account. The existing empirical studies show that the asset prices exhibit the pattern of jump clustering, which is especially evident during the financial crisis. Besides, there are jumps in the volatility of asset prices, and asymmetric cross-feedback between the volatility and jumps of asset prices. Therefore, it would be helpful for improving the option pricing performance and estimating the implied volatility more accurately to incorporate the above characteristics into option pricing models.

To illustrate the jump clustering, volatility jump and the asymmetric cross-feedback between jumps and volatility, this study first proposes a model with cross-feedback between self-exciting jumps and stochastic volatility for option pricing under the framework of affine jump-diffusion, and derives the semi-analytical expression for European option prices by using risk-neutral pricing theory, generalized Fourier transform and conditional characteristic function. Then, this study uses Shanghai 50ETF data to calibrate the model, and by comparison examines the fitting and prediction abilities of the proposed model in option prices and implied volatility.

The empirical results indicate that the prices of Shanghai 50ETF are negatively correlated with the volatility, which means that there are leverage effect and negative volatility feedback effect in Shanghai 50ETF prices. In addition, the prices of Shanghai 50ETF exhibit the behavior of upward jump clustering and downward jump clustering. There is also an asymmetric cross-feedback phenomenon between the volatility and jumps: downward jumps have a greater effect on volatility than upward jumps, and volatility affects downward jumps more significantly. This feature can well demonstrate the price collapses during the stock market crash. Besides, compared with two benchmark models, the proposed model with cross-feedback between self-exciting jumps and stochastic volatility has better fitting and prediction abilities for option prices and implied volatility, whether during the period of stock market crash or the period of market stabilization.

The study extends the theoretical option pricing models, and provides evidence for jump clustering and asymmetrical cross-feedback between jumps and volatility in Shanghai 50ETF. The study confirms the rationality and importance of incorporating jump clustering and asymmetrical cross-feedback between jumps and volatility into asset price models by comparing the performance of fitting and forecasting option prices and implied volatility under different models, and it also provides practical guidance for investors to value the options reasonably and implement effective risk hedging strategies.

**Keywords:** Shanghai 50ETF; option pricing; jump clustering; stochastic volatility; cross-feedback

**Received Date:** April 16<sup>th</sup>, 2021      **Accepted Date:** December 7<sup>th</sup>, 2021

**Funded Project:** Supported by the National Natural Science Foundation of China (71971077) and the Excellent Youth Science Foundation of Hunan Province (2019JJ30001)

**Biography:** PAN Dongtao is a Ph.D candidate in the College of Finance and Statistics at Hunan University. His research interests include financial engineering and asset pricing. His representative paper titled “Exchange options under clustered jump dynamics” was published in the *Quantitative Finance* (Issue 6, 2020). E-mail: [dtpan@hnu.edu.cn](mailto:dtpan@hnu.edu.cn)

MA Yong, doctor in management, is a professor in the College of Finance and Statistics at Hunan University. His research interests include financial engineering and risk management. His representative paper titled “Pricing vulnerable options with jump clustering” was published in the *Journal of Futures Markets* (Issue 12, 2017). E-mail: [yama@hnu.edu.cn](mailto:yama@hnu.edu.cn) □

(责任编辑: 刘思宏)