第 24 卷第 1 期
2011 年 2 月
管理科学 ISSN 1672-0334
Journal of Management Science
Vol. 24 No. 1 82-89
February, 2011

基于全最小二乘拟蒙特卡罗方法的可转债定价研究

张卫国,史庆盛,许文坤
华南理工大学 工商管理学院,广州 510640

摘要:基于传统的可转债最小二乘蒙特卡罗模拟定价方法,通过使用随机 Faure 序列和方差减小技术,有效地降低模型估计结果的误差,使用考虑解释变量和被解释变量误差的全最小二乘回归方法代替普通的最小二乘回归方法,提出可转债的全最小二乘拟蒙特卡罗定价方法,并给出该定价方法的具体算法步骤。以2002 年10 月16 日发行的燕京可转换债券为例进行实证分析,从可转债的理论价值、计算标准差以及模型的运行时间等几个方面与传统的蒙特卡罗方法进行比较。研究结果表明,使用全最小二乘拟蒙特卡罗方法进行计算得到的结果更为合理,且估计误差和计算时间都更少,从而验证了该方法在可转债定价应用上的有效性。

关键词:可转债定价;全最小二乘;拟蒙特卡罗;Faure 序列;对偶变量法
中图分类号:F830.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-0334(2011)01-0082-08

1 引言

1843 年美国发行全世界第一份可转换公司债券,之后可转换债券由于其灵活性受到广大投资者和融资者的欢迎,可转债市场也得到迅速的发展。随着中国资本市场的全面开放,可转债必将成为中国证券市场最重要的金融工具之一。由于可转换债券是一种混合债券,它既包含普通债券特征,同时还具有与标的股票的嵌入式期权相应的特性,因此可转换债券是一种依赖于股票和利率等多种标的、价值形态异常复杂、路径依赖特征极强的复合美式衍生品,对它的准确定价具有很强的学术价值和重要现实意义。

目前,用于可转换债券定价的方法很多,概括起来主要包括解析求解方法、基于偏微分方程的求解分析方法和蒙特卡罗模拟方法 3 大类。由于蒙特卡罗方法具有简单灵活、容易处理离散化的息票红利以及路径依赖等可转债的现实特征,逐渐成为可转换债券定价中最为有效的方法之一,尤以 Longstaff 等[1] 提出的基于最小二乘法回归的蒙特卡罗模拟方法应用最为广泛。

本研究基于国内外研究现状和可转换债券的美式期权特征,受 Longstaff 等[1] 的方法启发,分别对最小二乘回归方法和蒙特卡罗模拟方法进行改进,并在此基础上提出可转债的全最小二乘拟蒙特卡罗(TLSQM)定价模型。

2 相关研究评述

由于具有内嵌期权的特质,早期可转债定价的理论方法主要来自 Black 等[2] 关于期权及公司债券定价的研究。1977 年 Ingersoll[3] 首次将 Black-Scholes 模型应用到可转债定价问题中,在之后的研究中,许多学者在考虑利率、股价和违约风险等多个因素的基础上,提出更为复杂的定价模型。Arak 等[4] 从期限结构的角度分析可交换可转债的定价问题等,为可转债的定价研究提供了一种新的思路;Mike 等[5] 通过对股票价格行为进行观察,指出流动性是股票价格和收益的重要影响因素之一,即流动性具有价值;随后,Gu 等[6] 也对中国股市的下单规律进行深入研

收稿日期:2010-04-22 **修返日期**:2010-08-22
基金项目:国家自然科学基金(70825005);教育部人文社会科学研究规划基金(07JA630048)
作者简介:张卫国(1963-),男,陕西安康人,毕业于西安交通大学,获博士学位,现为华南理工大学工商管理学院教授、博士生导师,研究方向:决策理论、金融工程、投资及风险管理、信息科学计算等。E-mail:wgzhang@ scut. edu. cn

究,实证结果显示,波动性和流动性都是证券市场重要的指标,它们相生相伴、互为因果但又不完全相关。

中国学者对可转债定价的研究始于21世纪初。杨大楷等[7]最早对中国可转债的定价和设计进行探讨;许可等[8]进一步考虑中国可分离转债的特点,从实证的角度对其进行定价分析,其实证结果对中国可分离债发行价的确定具有较大的参考意义;周其源等[9]在Black-Scholes期权模型假设框架下,依据风险中性定价原理,采用完全拆解法,推导出可转债的定价解析式;张普等[10]通过对股票价格行为进行分析,指出除流动性价值外,股票价格的波动性同样具有价值,并应用非参数蒙特卡罗模拟对股票的价格波动进行模拟,具有一定的实践指导意义;黄靖贵等[11]基于鞅方法的定价理论,全面考虑可转债各种条款、信用风险以及转股时股市受到的稀释作用等因素后,给出可转换债券的定价公式,该方法由于考虑的因素较齐全,因此得到的结果也相对比较精确;韩立岩等[12]将基于PLS的美式期权定价方法拓展到可转债的定价,从而更好地解决了多因素扰动条件下的可转债定价问题。

由于Longstaff等[1]提出的基于最小二乘法回归的蒙特卡罗模拟(LSM)方法能够有效地解决美式期权的定价问题,从而得到最为广泛的应用;赵洋等[13]和唐文彬等[14]最早使用LSM方法为中国可转换债券进行定价研究。在上述的蒙特卡罗方法中,人们常常使用伪随机序列模拟股票价格的波动路径,进而对可转债进行定价,该方法具有收敛速度慢等缺点,因此有学者提出拟蒙特卡罗方法,即用确定性序列代替随机序列,这样可以改进收敛性,而且有确定的误差界限[15]。罗付岩等[16]采用Halton、Faure和Sobol 3个不同的确定性序列代替伪随机序列,进而得到3种不同的拟蒙特卡罗方法,分别应用它们对期权的定价问题进行数值分析,并比较它们之间的优劣。另外,针对最小二乘方法在期权定价方面的不足之处,杨海军等[17]在LSM方法的基础上,运用加权最小二乘法进行回归,并将其应用于美式期权的定价上。

基于对已有研究的介绍和分析,本研究分别从最小二乘回归方法和股票价格路径的模拟两个方面对可转债的定价模型进行研究。首先使用全最小二乘方法[18]代替经典的最小二乘方法,同时使用随机化的Faure序列代替伪随机序列对股票价格进行模拟,在此基础上提出可转债的全最小二乘拟蒙特卡罗定价模型,同时提出模型求解的算法步骤,并对模型进行实证分析,就可转债的价值、标准差以及计算效率等方面与同样基于全最小二乘回归的普通蒙特卡罗(TLSM)定价方法进行比较分析。

3 可转债投资策略及其价值分析

可转债兼具股票、债券和期权的混合特征,既要考虑可转换债券发行人所支付的周期性利息,又要考虑可转换债券所包含的多种期权,因此可以将可转债价值看做纯债券价值和3个美式期权(转换权、赎回权和回售权)价值的总和。投资者在到期日之前可以选择将可转债转换为股票,或者在特定的情况下按规定的价格将债券回售给发行人;同样的,发行人也可以在特定的情况下按规定的价格将债券赎回。投资者的最优转换策略和发行人的赎回策略相互依赖,因此可转债所包含的各种期权不能简单地分开定价然后相加,而是要在双方的相互博弈中找出其最优投资策略。

设T为可转债到期日期,可转债价格变动单位日期为一天,初始时刻为$t=0$,I为纯债券部分的日利息,A为面值,r_0为无风险连续复利率,r_s为可转债的日信用风险溢价。在到期日之前的每一时刻,假设S_t为股票价格;Z为转股价格,Z不变;P_t为回售价格,K_t为赎回价格,如果不可回售则$P_t=0$,不可赎回则$K_t=\infty$;H_t为可转换债券内嵌期权的持有价值,即可转债不立即执行内嵌期权而继续持有的条件期望值;N为转股率;V_t为可转债在t时刻的价值;B_t为t时刻可转债的纯债券价值,C_t为t时刻可转债内嵌的美式期权价值。则有

$$V_t = B_t + NC_t \tag{1}$$

其中,纯债券部分价值等于债券在执行时刻t至到期日T间任意时刻t'所取得的利息以及债券的面值A按期望收益r贴现得到的价值。即

$$B_t = \sum_{t'=t}^{T} \exp[-(r_0+r_s)(t'-t)]I + \exp[-(r_0+r_s)(T-t)]A \tag{2}$$

对可转债的内嵌美式期权进行定价是本研究的重点,根据美式期权在任意时点的价值为期权执行价值和后续持有价值在当前时点的条件期望值中的较大值的思路,将可转债价值的推导过程看做是对转换价值与后续持有价值的条件期望值进行比较并取其中较大值的反推过程。这里使用当期股票价格的多项式最小二乘法对期权的持有价值进行仿真回归,求后续持有价值在当前时点的条件期望值的拟合值,该拟合值是包含3个内嵌期权的可转债的持有价值,而不只是一个期权的价值。且在每个时点对美式期权价值进行计算时,必须先检查如下3个边界条件,以决定可转债应该如何执行其内嵌的期权。

(1) 转换边界条件:$C_t \geq S_t - Z$

可转债的价值不能少于转换价值,否则将存在套利机会,即可转债的持有价值必须不小于转换价值,投资者才会继续持有可转债。

(2) 赎回边界条件:$C_t \leq K_t - Z$

即只有当赎回价格高于可转债持有价值时,投资者才能继续持有可转债。

(3) 回售边界条件:$C_t \geq P_t - Z$

即只有当回售价格低于可转债的持有价值时,投资者才会继续持有可转债。

因此,在t时刻,可转债内嵌的美式期权价值为

$$C_t = \max[P_t - Z, S_t - Z, \min(K_t - Z, H_t - Z)] \quad (3)$$

假设 τ 为可转债的最优停时,则可转债在 τ 时刻的价值为

$$V_\tau = B_\tau + NC_\tau \quad (4)$$

则在初始时刻可转债的价格为

$$V_0 = \exp[-(r_0 + r_s)\tau](B_\tau + NC_\tau) \quad (5)$$

4 基于全最小二乘的拟蒙特卡罗方法

4.1 全最小二乘方法

最小二乘法作为一种最常见的拟合准则,其参数估计比较简单,Longstaff 等[1] 最早提出将其用于美式期权定价中。然而普通的最小二乘法(LS)要求解释变量均为精确无误差的,或者其测量误差与模型因变量的测量误差相比可以忽略不计,即所有误差均来自于因变量。而事实上,在对可转债进行定价时用到的股票价格和可转债的期权持有价值均为模拟值,它们都存在一定的误差或扰动,因此本研究使用同时考虑解释变量和被解释变量误差的估计方法,即全最小二乘法(TLS)[18]。

对于解释变量和被解释变量数据矩阵均含有误差的回归估计问题,TLS 可以表述为对如下矩阵方程求普通最小二乘解,即

$$(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{d})'\beta = \boldsymbol{Y}+\boldsymbol{e}$$

其中,$\boldsymbol{X}$ 为 $n \times p$ 维的解释变量数据矩阵,$\boldsymbol{d}$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的误差向量,$\boldsymbol{Y}$ 为 $n \times 1$ 维的被解释变量数据向量,$\boldsymbol{e}$ 为向量 $\boldsymbol{Y}$ 的误差向量,β 为解释变量系数。

为了说明使用 TLS 方法的合理性和必要性,假设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是两个同维数的数据列向量,分别利用 LS 和 TLS 方法进行回归分析,即求如下的回归方程为

$$\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{e} = \beta_0 + \beta_1 \boldsymbol{X} \quad \text{(LS)}$$

$$\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{e} = \beta_0 + \beta_1 (\boldsymbol{X}+\boldsymbol{d}) \quad \text{(TLS)}$$

其中,β_0 为常数项系数,β_1 为一次项系数,$\boldsymbol{e}$ 为列向量 $\boldsymbol{Y}$ 的误差向量,$\boldsymbol{d}$ 为列向量 $\boldsymbol{X}$ 的误差向量。

LS 与 TLS 方法的区别在于,前者度量的是在变量 $\boldsymbol{X}$ 有精确数据,只考虑变量 $\boldsymbol{Y}$ 存在的扰动;而后者则同时考虑变量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 存在的扰动。

为了比较两种方法,本研究讨论二维平面上确定拟合直线的情形。假设原始直线方程为 $y = a_0 + k_0 x$,$a_0 = 0.4, k_0 = 1$,围绕这条直线产生两组随机数据,然后分别用 LS 和 TLS 方法确定回归系数,并进行比较。

图 1 和图 2 显示使用 LS 方法和 TLS 方法对数据进行拟合的结果,为描述方便,用虚线表示原始的直线方程,实点表示围绕这条直线产生的一组随机数,实线表示按照 LS 方法和 TLS 方法确定的直线。

从图 1 和图 2 可以看出,TLS 方法得到的回归直线与原始直线几乎重合,而 LS 方法与原始直线的差别较大。

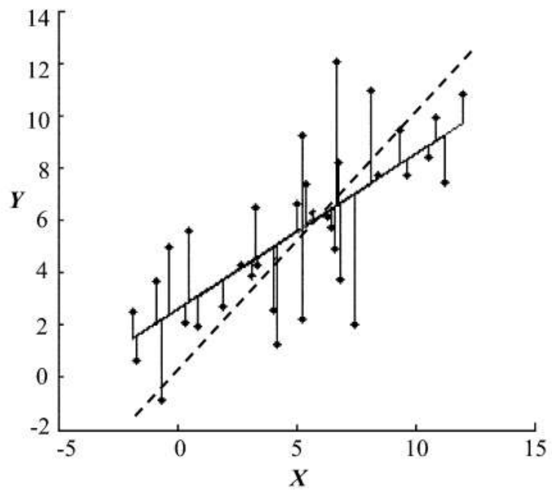

图 1 使用 LS 方法的拟合结果

Figure 1 Fitting Results Using LS Method

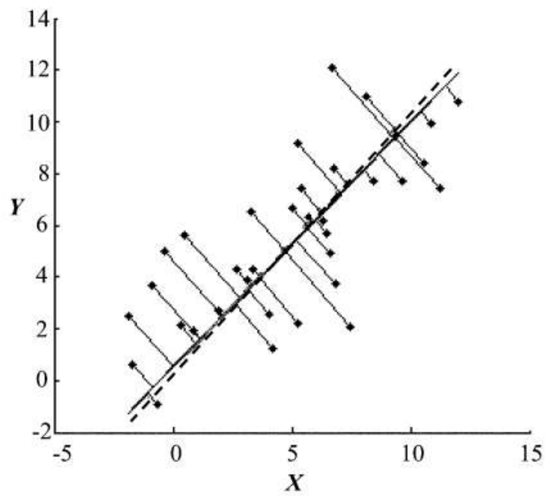

图 2 使用 TLS 方法的拟合结果

Figure 2 Fitting Results Using TLS Method

4.2 拟蒙特卡罗方法

蒙特卡罗方法被广泛地应用于高维积分等领域,是一种非常有效的数值方法,然而该方法所产生的随机数为伪随机数,具有聚集性的特点,且收敛速度慢。因此本研究考虑使用其他的低差异序列来代替伪随机序列,相应的方法称为低差异序列法,或拟蒙特卡罗方法。常用的低差异序列有 Halton 序列、Faure 序列和 Sobol 序列等,本研究使用随机化的 Faure 序列,探讨其在可转债定价中的应用,并与普通蒙特卡罗方法进行比较。

4.2.1 Faure 序列

Faure 序列的构建方法如下[19]。

设 b 为一个素数,$b \geq 2$,s 为自然数,集合 $\mathbf{Z}_b = \{0, 1, \cdots, b-1\}$,通过以下原理可以构造出 $[0,1)^s$ 中的一个 s-维 Faure 序列 $\{x_n\}$。

对于 $n = 0, 1, 2, \cdots$,每个固定的 n 关于基底 b 都有唯一的位记数表达式,即

$$n_{m-1} n_{m-2} \cdots n_1 n_0$$

其中,m 与 n 有关,且 $n_{m-1} \neq 0$,$n_i \in \mathbf{Z}_b$,即 $n = \sum_{i=0}^{m-1} n_i b^i$。

记 $n^* = (n_0, n_1, \cdots, n_{m-2}, n_{m-1})'$。

设 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \cdots, \boldsymbol{D}_s$ 是 $m \times m$ 阶矩阵,其中 $\boldsymbol{D}_1$ 为 m 阶单位矩阵,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} D_0^0 & D_1^0 & \cdots & D_{m-1}^0 \\ 0 & D_1^1 & \cdots & D_{m-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$D_s = D_3^{s-2} (s \geqslant 4)$$

其中,$D_R^V = \dfrac{R!}{V!(R-V)!}$,$0 \leqslant R \leqslant m-1$。记 $f^{(t)} = \mathrm{mod}(\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{n}^*, b) = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$,$\mathrm{mod}(\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{n}^*, b)$ 为矩阵 $\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{n}^*$ 的模 b 计算。再另 $F_n^{(t)} = \dfrac{f_1}{b} + \dfrac{f_2}{b^2} + \cdots + \dfrac{f_m}{b^m} \in [0,1)^s$,则得到 $[0,1)^s$ 维 Faure 序列为

$$F_n = (F_n^{(1)}, F_n^{(2)}, \cdots, F_n^{(s)}) \in [0,1)^s$$

4.2.2 低差异随机序列

根据上一节内容,给定固定的 n 和基底 b 时,得到的 $[0,1)^s$ 维 Faure 序列 F 也是固定的,因此需要使其随机化。首先应用对偶变数法增加抽样数目,从而减小模拟方差,即对 Faure 序列 F 取负,得到新的序列 $\bar{F} = [F, -F]$。

再对 $\bar{F}$ 使用 Cranley-Patterson 变换,即

令 $\bar{\bar{F}}_n^{s_i} = \bar{F}_n^{s_i} + \varepsilon_{s_i} \quad s_i = 1,2,\cdots,2s$

$\bar{F}_n^{s_i} \in \bar{F} \quad \varepsilon_{s_i}$ 为服从 $(0,1)$ 正态分布的随机数。

再取 $\bar{\bar{F}}_n^{s_i}$ 的小数部分,就得到随机 Faure 序列 $\bar{\bar{F}} = \{\bar{\bar{F}}_n^{s_i}\} \in (-1,1)^s$。

结合 Matlab 编程,由服从 $[0,1)$ 均匀分布随机化的 Faure 序列获得正态分布随机数,并将其应用到可转债定价中。

5 算法设计

假设可转债于初始时刻 $t = 0$ 发行,T 为可转换债券到期日期,将这段时间以天为单位等分为 L 段,$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_L = T$,本研究根据 Longstaff 等[1] 提出的方法和全最小二乘回归的思想,对可转债的定价模型进行算法设计,算法步骤如下。

步骤 1　首先从当前的股票价格 S_0 出发,使用随机化的 Faure 序列模拟 M 条股票价格的路径,用 $S_t^{M_i}$ 表示第 M_i 条路径在 t 时刻的股票价格,$M_i = 1,2,\cdots,M$,t 为时间指标,$t = 0,1,\cdots,T$。根据发行条款的规定计算该时刻的回售价格 P_t^i 和赎回价格 K_t^i。

步骤 2　在到期日 T,用 B_T 表示可转债纯债券价值,$B_T = I + A$,B_T 与路径无关。用 $C_T^{M_i}$ 表示第 M_i 条路径可转债内嵌的美式期权价值,$C_T^{M_i} = \max(S_T - Z, 0)$,则 T 时刻第 M_i 条路径可转债的价值为 $V_T^{M_i}$,$V_T^{M_i} = B_T + C_T^{M_i}$。

步骤 3　在时间 t_{L-1},在所有路径上计算可转债的期权持有价值为

$$H_{t_{L-1}}^{M_i} = \exp(-r_0 - r_s) C_T^{M_i} \tag{6}$$

选用所有期权执行价值大于 0 的路径,假设共有 $\bar{M}$ 条,在这 $\bar{M}$ 条路径上使用全最小二乘法求解多项式回归方程为

$$H_{t_{L-1}}^{\bar{M}_i} = \sum_{o=1}^{p} \alpha_o (S_T^{\bar{M}_i})^o, \bar{M}_i = 1,2,\cdots,\bar{M} \tag{7}$$

其中,p 为回归多项式的次数。得到 (7) 式的系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,进而得到可转债的期权持有价值拟合值 $\bar{H}_{t_{L-1}}^{\bar{M}_i}$,$\bar{M}_i = 1,2,\cdots,\bar{M}$。

比较期权的执行价值 $E_{t_{L-1}}^{\bar{M}_i} = \max(S_T - Z, 0)$ 和持有价值 $\bar{H}_{t_{L-1}}^{\bar{M}_i}$ 的大小,并令

$$C_{t_{L-1}}^{\bar{M}_i} = \max(E_{t_{L-1}}^{\bar{M}_i}, \bar{H}_{t_{L-1}}^{\bar{M}_i})$$

在期权执行价值为 0 的路径上,令 $C_{t_{L-1}}^{M_i} = H_{t_{L-1}}^{M_i}$。

在时间 t_{L-1},在所有路径上计算可转债的纯债券价值,即

若 $E_{t_{L-1}}^{M_i} \geqslant \bar{H}_{t_{L-1}}^{M_i}$,则

$$B_{t_{L-1}} = I + A \tag{8}$$

若 $E_{t_{L-1}}^{M_i} < \bar{H}_{t_{L-1}}^{M_i}$,则

$$B_{t_{L-1}} = \exp[-(r_0 + r_s)] B_{t_L} \tag{9}$$

则 t_{L-1} 时刻可转债的价值为 $V_{t_{L-1}}^{M_i}$,$V_{t_{L-1}}^{M_i} = B_{t_{L-1}} + C_{t_{L-1}}^{M_i}$。

步骤 4　按照步骤 3 的方法,逐次向后倒推。设已经求得 t_{k+1} 时的每条路径上可转债的纯债券价值、期权价值和可转债的价值分别为 $B_{t_{k+1}}$、$C_{t_{k+1}}^{M_i}$ 和 $V_{t_{k+1}}^{M_i}$。在所有路径上计算可转债的期权持有价值为 $H_{t_k}^{M_i} = \exp(-r_0) S_{t_{k+1}}^{M_i}$,假设共有 $\bar{M}$ 条路径期权的执行价值大于 0,则在该 $\bar{M}$ 条路径上使用全最小二乘法求解多项式回归方程为

$$H_{t_k}^{\bar{M}_i} = \sum_{o=1}^{p} \alpha_o (S_{t_k}^{\bar{M}_i})^o, \bar{M}_i = 1,2,\cdots,\bar{M}$$

进而得到可转债的期权持有价值拟合值 $\bar{H}_{t_k}^{\bar{M}_i}$,$\bar{M}_i = 1,2,\cdots,\bar{M}$。令 $C_{t_k}^{\bar{M}_i} = \max(E_{t_k}^{\bar{M}_i}, \bar{H}_{t_k}^{\bar{M}_i})$,$E_{t_k}^{\bar{M}_i} = \max(S_{t_k} - Z, 0)$。

在所有路径上计算可转债的纯债券价值,即

若 $E_{t_k}^{M_i} \geqslant \bar{H}_{t_k}^{M_i}$,则 $B_{t_k} = I + A$

若 $E_{t_k}^{M_i} < \bar{H}_{t_k}^{M_i}$,则 $B_{t_k} = \exp[-(r_0 + r_s)] B_{t_{k+1}}$

得到 t_k 时刻可转债的价值为 $V_{t_k}^{M_i}$,$V_{t_k}^{M_i} = B_{t_k} + C_{t_k}^{M_i}$。

步骤 5　重复步骤 4 直到 t_1,便得到可转债的价值为

$$V_0 = \frac{1}{M} \sum_{M_i=1}^{M} \exp[-(r_0 + r_s)] (B_{t_1} + NC_{t_1}^{M_i}) \tag{10}$$

6 参数和数据选择

本研究对可转债定价模型所考虑的参数主要分为两类。一类是受证券市场影响的参数,包括股票的波动率、无风险利率;另一类是由可转债发行时招募说明书所规定的参数,包括转股比例(转股价格)、距到期日时间、赎回条件、回售条件等。

6.1 股价过程

假设股票价格服从几何布朗运动,也即满足

$$\mathrm{d}S = rS\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}W \tag{11}$$

其中,S 为股票价格,r 为无风险利率,t 为当前时刻(单位为日),σ 为股票价格波动率,W 为随机数,dW 服从期望为 0、方差为 t 的正态分布。那么可以得到股票价格为

$$S_t = S_0 \exp[(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma dW] \tag{12}$$

令 $dW = \sqrt{t}x$,x 为服从标准正态分布的随机变量。则有

$$S_t = S_0 \exp[(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sqrt{t}\sigma x] \tag{13}$$

因此,模拟股票价格 S 就如同模拟随机变量 x。本研究使用随机化的 Faure 序列构造随机变量 x,进而可得到模拟的股价路径。

6.2 信用风险

中国对发行可转换债券的资格限制比较严格,发行人大多为国有大型企业或资产规模和业绩良好的公司,大部分可转换债券的信用等级很高,信用风险较小,但是仍然比同期的国库券和定期存款的风险要大,因此在对可转换债券进行定价时不应忽略其信用风险价值。而信用风险主要在于转股失败,发行人无力支付回售的可转换债券等情况,使信用风险始终存在于可转换债券的债权价值和股权价值中。用无风险连续复利率 r_0 与可转债信用风险溢价 r_s 之和作为可转换债券的债券价值贴现因子,对考虑信用风险的可转债进行定价。

由于目前发行的可转债几乎都是 AAA 级,可假定发行公司的信用风险利差都是固定的。郑振龙等[20]采用联合估计方法,将公司债的期望收益率分解为市场利率和违约风险溢价后进行估计,把 3 年期和 5 年期信用利差分别设为0.90%和0.98%。引用该结果,本研究选取无风险年利率 $r_0 = 2.65\%$,信用风险溢价 $r_s = 0.98\%$,得到无风险日利率 $r'_0 = 0.007\ 3\%$,信用日溢价为 $r'_s = 0.002\ 7\%$,进而得到可转债的贴现因子为 $r = r'_0 + r'_s = 0.01\%$。

6.3 波动率

可转债定价模型中的波动率是根据股票的波动率而来的,本研究采用股票的历史波动率。

本研究选取2002 年10 月16 日前250 天燕京股票的收盘价作为数据样本计算其日收益率标准差,得到其日波动率 $\sigma = 0.022$。

6.4 数据选择

为方便比较分析,本研究采用已到期的可转债数据进行计算分析,同时还从以下几个方面进行考虑。

(1)考虑到2005 年至2007 年是中国股市活跃的时期,因此选择有效期(即可转债的发行时间至可转债的到期时间)包含该时间段的可转债进行实证分析;

(2)标的股票服从对数正态分布,而且不考虑分红;

(3)考虑可转债可以采取转股、提前赎回、回售、到期赎回等行为,但不存在赎回保护期和转股保护期;

(4)忽略可转债在存续期内对转股价格的修正;

(5)不考虑可转债定价票面利率的浮动,即假设无风险利率和票面利率均为常数。

基于以上考虑,本研究以2002 年10 月16 日发行的燕京可转换债券为例,该可转债此前已经连续 3 年被评为 AAA 信用级别,此次发行的可转换债券期限为 5 年,初始转股价格 $X = 10.59$,面值 $A = 100$,票面年利率 $I_0 = 1.2\%$,得到其连续日利率 $I = 0.003\ 3\%$,发行日燕京股票收盘价格 $S_0 = 8.95$ 元。燕京可转债的参数及条款设计见表 1 和表 2 所示。

表1 可转债参数

Table 1 Convertible Bond Parameters

转债名称	发行日期	期限(年)	票面利率(%)	同期发行国债利率(%)	转股价格(元)
燕京转债	2002-10-16	5	1.20	2.65	10.59

表2 部分发行条款

Table 2 Part of Terms of Issue

<table>
<tr><td>赎回条款</td><td colspan="5">在可转债转股期内,如果本公司股票收盘价格连续 20 个交易日高于当期转股价的 130%,则本公司有权以 102 元/张(含当年利息)的价格赎回全部或部分未转换股份的燕京转债。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">回售条款</td><td colspan="5">在可转债转股期内,如果本公司股票收盘价格连续 20 个交易日低于当期转股价的 70%,则持有者有权选择按如下价格回售其持有的燕京转债。</td></tr>
<tr><td></td><td>第 2 年</td><td>第 3 年</td><td>第 4 年</td><td>第 5 年</td></tr>
<tr><td>回售价格(元/张)</td><td>101</td><td>102</td><td>103</td><td>104</td></tr>
</table>

注:以上资料来自聚源数据库。

7 结果分析

运用全最小二乘拟蒙特卡罗方法,并按照第 3 节提出的算法计算燕京可转债的理论价值,将该结果与运用普通蒙特卡罗模拟方法的定价结果进行比较分析。使用 Matlab 编程,分别使用普通蒙特卡罗方法(LSM)和拟蒙特卡罗方法(LSQM)拟合M = 1 000 条股票路径,见图 3 和图 4。

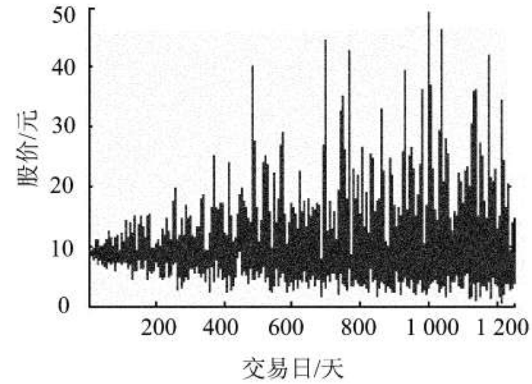

图3　使用 LSM 拟合的股票价格路径

Figure 3　Stock Price Path Using LSM Method

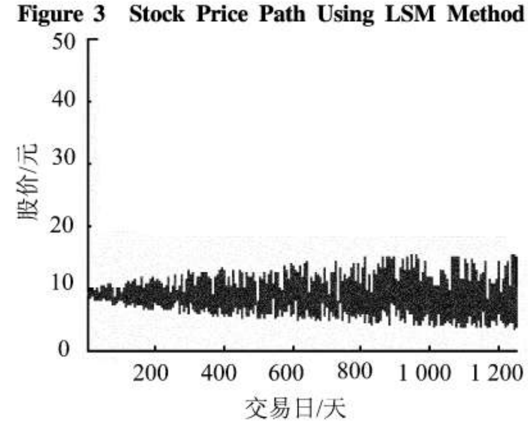

图4　使用 LSQM 拟合的股票价格路径

Figure 4　Stock Price Path Using LSQM Method

分别使用全最小二乘普通蒙特卡罗方法(TLSM)和全最小二乘拟蒙特卡罗方法(TLSQM)对燕京可转债进行100 次定价计算,结果见图 5 和图 6。

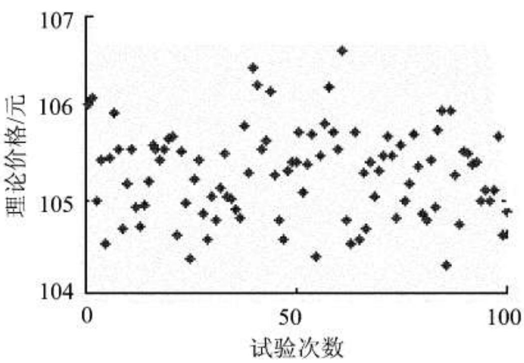

图5　使用 TLSM 计算的可转债理论价格

Figure 5　Theory Price of Convertible Bonds Using TLSM Method

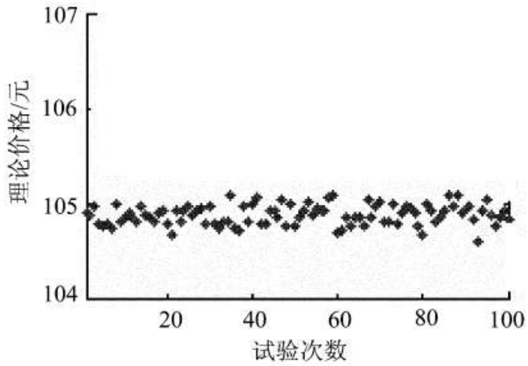

图6　使用 TLSQM 计算的可转债理论价格

Figure 6　Theory Price of Convertible Bonds Using TLSQM Method

对两种方法各自得到的100 个可转债理论价格进行均值计算,可得到两种方法的平均理论价格分别为105.25 元和104.85 元。从实证结果发现,该可转债的发行价格100 元存在低估的现象,低估误差约为5%。

重复前面的计算100 次,可得到两种方法各自对应的100 个计算标准差,见图 7 和图 8。

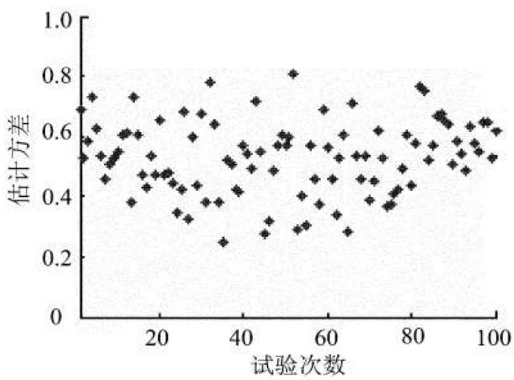

图7　使用 TLSM 计算的标准差

Figure 7　Standard Deviation under TLSM Method

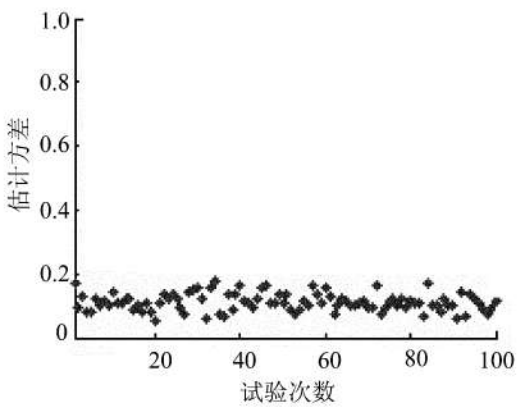

图8　使用 TLSQM 计算的标准差

Figure 8　Standard Deviation under TLSM Method

再分别对两种方法的100 个标准差求均值,得到两种方法计算结果的平均标准差分别为0.51 和0.11,该结果显示,由于使用低差异的 Faure 序列和对偶变量法,使拟蒙特卡罗方法的结果相对普通的蒙特卡罗方法方差明显降低,减少的方差约为78%。可见,TLSQM 方法能够得到比 TLSM 方法更好的拟合效果,从而得到的理论价值更加贴近实际价值。

对这两种定价方法的计算时间进行一个比较。重复上述计算 1 万次,TLSM 方法用时2 183 秒,而同样的计算次数,TLSQM 方法用时仅为1 256 秒。可见,由于用低差异随机序列代替伪随机序列,使 TLSQM 方法在计算速度上要优于 TLSM 方法(本处速度比接近1.7 比 1)。本次计算使用的计算机是 Intel 公司生产的 DualCore 处理器,主频率为2 600M。

综合比较两种算法的计算效率,考虑算法效率的计算公式为效率 = $\frac{1}{\text{计算误差} \times \text{计算时间}}$,那么在 1 万次模拟中,TLSQM 的计算效率是 TLSM 的8.019 倍。

8 结论

本研究使用全最小二乘方法,引入拟蒙特卡罗方法,对可转债的定价算法进行研究,得出以下结论。

(1)由于使用 Faure 序列和方差减小技术,拟蒙特卡罗模拟与传统的蒙特卡罗模拟相比在计算精度上有很大的提高,拟蒙特卡罗模拟能快速地收敛到理论值;

(2)拟蒙特卡罗模拟在计算速度上也快于传统的蒙特卡罗模拟,能够有效节省算法的计算时间;

(3)由于使用全最小二乘方法代替普通的最小二乘方法,使可转债内嵌期权的定价更趋合理;

(4)选用燕京转债进行实证分析,发现燕京转债的理论价格比实际发行价高出约5%;

本研究应用拟蒙特卡罗模拟需要解决的一个主要问题是如何生成更高维的低差异数序列,因此将来可对此问题进行深入研究。随着中国可转债的发展前景看好,可转债定价模型必将有更为广泛的应用前景。

参考文献:

[1] Longstaff F A, Schwartz E S. Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach [J]. Review of Financial Studies, 2001, 14(1): 113-147.

[2] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-659.

[3] Ingersoll J E, Jr. A contingent claim valuation of convertible securities[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 4(3): 289-322.

[4] Arak M, Martin A L. Convertible bonds: How much equity, how much debt? [J]. Financial Analysts Journal, 2004, 61(2): 44-50.

[5] Mike S, Farmer J D. An empirical behavioral model of liquidity and volatility[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2008, 32(1): 200-234.

[6] Gu G F, Chen W, Zhou W X. Empirical regularities of order placement in the Chinese stock market[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2008, 387(13): 3173-3182.

[7] 杨大楷,杜新乐,刘庆生. 浅论我国可转换债券的定价及设计[J]. 中国管理科学, 2001, 9(4): 7-15.
Yang Dakai, Du Xinle, Liu Qingsheng. The mechanism of CB pricing and designing in China[J]. Chinese Journal of Management Science, 2001, 9(4): 7-15. (in Chinese)

[8] 许可,李昕. "马钢"可分离转债定价实证分析[J]. 管理学报, 2007, 4(6): 815-819.
Xu Ke, Li Xin. Analyzing the pricing of bond with attached warrant empirically[J]. Chinese Journal of Management, 2007, 4(6): 815-819. (in Chinese)

[9] 周其源,吴冲锋,刘海龙. 可赎回可转换贴现债券完全拆解定价法[J]. 管理科学学报, 2009, 12(4): 135-144.
Zhou Qiyuan, Wu Chongfeng, Liu Hailong. Analytic valuation of the callable convertible discount bonds: Equivalent decomposition method [J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(4): 135-144. (in Chinese)

[10] 张普,吴冲锋. 基于非参数蒙特卡罗模拟的股票波动性价值研究[J]. 管理科学, 2009, 22(3): 89-95.
Zhang Pu, Wu Chongfeng. The study of stocks' volatility premium based on nonparametric Monte Carlo simulation [J]. Journal of Management Science, 2009, 22(3): 89-95. (in Chinese)

[11] 黄靖贵,杨善朝,冯霞. 具有动态信用风险的可转债的定价研究[J]. 数理统计与管理, 2008, 27(6): 1108-1116.
Huang Jinggui, Yang Shanchong, Feng Xia. The pricing of convertible bond with dynamic credit risk [J]. Application of Statistics and Management, 2008, 27(6): 1108-1116. (in Chinese)

[12] 韩立岩,牟晖,王颖. 基于偏最小二乘回归的可转债定价模型及其实证研究[J]. 中国管理科学, 2006, 14(4): 81-87.
Han Liyan, Mou Hui, Wang Ying. Convertible bond pricing model based on partial least square method and its empirical research[J]. Chinese Journal of Management Science, 2006, 14(4): 81-87. (in Chinese)

[13] 赵洋,赵立臣. 基于蒙特卡罗模拟的可转换债

券定价研究[J]. 系统工程学报,2009,24(5):621-625.
Zhao Yang, Zhao Lichen. Monte Carlo-based pricing of convertible bonds[J]. Journal of Systems Engineering, 2009,24(5):621-625. (in Chinese)

[14] 唐文彬,张小勇. LSM 可转债定价模型及其应用研究[J]. 财经理论与实践,2008,29(154):50-53.
Tang Wenbin, Zhang Xiaoyong. LSM pricing model of convertible bond and its application research[J]. The Theory and Practice of Finance and Economics, 2008,29(154):50-53. (in Chinese)

[15] Joy C, Boyle P P, Tan K S. Quasi-Monte Carlo methods in numerical finance[J]. Management Science, 1996,42(6):926-938.

[16] 罗付岩,徐海云. 拟蒙特卡罗模拟方法在金融计算中的应用研究[J]. 数理统计与管理,2008,27(4):605-610.
Luo Fuyan, Xu Haiyun. The applying of quasi-Monte Carlo methods in financial computation[J]. Application of Statistics and Management, 2008,27(4):605-610. (in Chinese)

[17] 杨海军,雷杨. 基于加权最小二乘拟蒙特卡罗的美式期权定价[J]. 系统工程学报,2008,23(5):532-538.
Yang Haijun, Lei Yang. Pricing American options with weighted least-squares quasi-Monte Carlo[J]. Journal of Systems Engineering, 2008,23(5):532-538. (in Chinese)

[18] 王福昌,曹慧荣,朱红霞. 经典最小二乘与全最小二乘法及其参数估计[J]. 统计与决策,2009(1):16-17.
Wang Fuchang, Cao Huirong, Zhu Hongxia. The classical least squares method and the total least squares method and its parameter estimation[J]. Journal of Statistics and Decision, 2009(1):16-17. (in Chinese)

[19] Owen A B. Variance with alternative scramblings of digital nets[J]. ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, 2003,13(4):363-378.

[20] 郑振龙,林海. 中国违约风险溢酬研究[J]. 证券市场导报,2003(6):41-44.
Zheng Zhenlong, Lin Hai. The premiums of default risk in China[J]. Securities Market Herald, 2003(6):41-44. (in Chinese)

Pricing Model of Convertible Bonds in China by Total Least-Squares Quasi-Monte Carlo Method

Zhang Weiguo, Shi Qingsheng, Xu Wenkun
School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China

Abstract: Based on the Least-Squares Monte Carlo method, the Total Least-Squares Quasi-Monte Carlo method for convertible bond pricing was proposed and the details of its algorithm were given. First, Faure sequences as well as variance reduction technique were used to effectively reduce the variance of the estimation results. Second, the Total Least-Squares Quasi-Monte Carlo method which took into account the errors of both the explanatory variables and explained variable was used to substitute the ordinary least squares regression method. At last, an empirical analysis of Yanjing Convertible bond issued on October 16, 2002 was given to make a comparison between TLSQM method and LSM method, in aspects of the theoretical value, calculation errors and the running time. The results show that the theoretical value by TLSQM method is more reasonable, and TLSQM method has smaller estimation error and shorter computing time than LSM method, which proves TLSQM method is more effective for the pricing of convertible bonds in China.

Keywords: convertible bonds pricing; total Least-Square; quasi-Monte Carlo; Faure sequence; antithetic variate method

Received Date: April 22nd, 2010　**Accepted Date**: August 22nd, 2010

Funded Project: Supported by the National Natural Science Foundation of China (70825005) and the Humanities and Social Sciences Planning Fund of Ministry of Education (07JA630048)

Biography: Dr. Zhang Weiguo, a Shaanxi Ankang native (1963 -), graduated from Xi'an Jiaotong University and is a professor and Ph. D. advisor in the School of Business Administration at South China University of Technology. His research interests include decision theory, financial engineering, investment and risk management, information scientific computing, etc. E-mail: wgzhang@scut.edu.cn
□